

В.С. Дацко<sup>1</sup>

## НЕСОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ «ТЕОРЕМЫ ЛИУВИЛЛЯ» И ПРЕДСКАЗУЕМОСТЬ АТМОСФЕРЫ И КЛИМАТА

**Резюме.** В работе обосновывается несостоятельность «теоремы Лиувилля» и, соответственно, невозможность основывать на ней предсказания поведения атмосферы и климата.

**Ключевые слова:** предсказуемость атмосферы, фазовое пространство, теорема Лиувилля, представление Лагранжа, осциллятор.

**Введение.** В метеорологии довольно активно применяется вывод так называемой «теоремы Лиувилля» о сохранении фазового объёма гамильтоновых систем. Следует заметить, что существует две теоремы Лиувилля. Одну в 1938 году обнаружил сам Жозеф Лиувилль [1]. Она посвящена решению систем уравнений, относится к чистой математике и не содержит никаких упоминаний о физике, а тем более о гамильтоновых системах. Русский перевод этой работы Лиувилля содержится в приложении монографии [2]. Вторая «теорема Лиувилля» самому Лиувиллю не принадлежит, мне не удалось точно определить, кто воспользовался именем Лиувилля, чтобы обосновать ошибочный вывод о сохранении фазового объёма гамильтоновых систем. Во всяком случае А. Пуанкаре в споре с Л. Больцманом использовал этот вывод. Именно его обосновывает М. Эрендорфер в работе «Уравнение Лиувилля и предсказуемость атмосферы», представленной в 2002 г. на семинар ESMWF «Предсказуемость погоды и климата» [3]. (Автор использует слова «уравнение Лиувилля» вместо «теорема Лиувилля»). Он вводит обозначения:

$$\dot{X} = \Phi(X, t), \quad \psi(X, t) \equiv \sum_{k=1}^N \frac{\partial \Phi_k(X, t)}{\partial X_k}.$$

Как считает Эрендорфер результаты Лиувилля накладывают условия на эволюцию фазового объёма для гамильтоновой динамики. Уравнения Гамильтона:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}.$$

Из этих формул и следует, что дивергенция  $\psi$  в фазовом пространстве, равна нулю, так как:

$$\psi = \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} = \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} + \frac{\partial}{\partial p_k} \left( -\frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \equiv 0,$$

а это позволяет сделать вывод о том, что якобы фазовый объём гамильтоновой системы сохраняется. В работе [2] выполнен довольно подробный анализ статьи [3], однако в ней отсутствует точное доказательство того, что положения работы [2] необходимы и достаточны.

**Материал и методы исследований.** Полезно ввести более привычные в механике обозначения так, как это сделал И.И. Ольховский [4]. «Рассмотрим бесконечную совокупность

---

<sup>1</sup> Филиал «Протвино» государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования Московской области «Университет «Дубна», Россия, 141281, г. Протвино, Северный проезд, д. 9; Тел.: (4967)-31-01-91 (секретарь), д.т. (4967)-74-26-95; e-mail: viktor.datsko@gmail.com.

одинаковых механических систем, отличающихся друг от друга только начальными условиями. Иначе говоря, рассмотрим бесконечное множество точных копий данной реальной системы (для всех этих систем задан одинаковый гамильтониан, одни и те же диссипативные силы, но начальные условия этих систем различны). Такая виртуальная совокупность систем называется ансамблем Гиббса. Пусть в произвольный момент времени  $t_0$  ансамбль заполняет область  $(\Gamma_0)$  фазового пространства, причём фазовый объём этой области равен:

$$\Gamma_0 = \int_{(\Gamma_0)} \delta q_{10} \dots \delta q_{s0} \delta p_{10} \dots \delta p_{s0}. \quad (43.2)$$

В момент времени  $t=t_0+\Delta t$  ансамбль займёт другую область  $(\Gamma)$  с фазовым объёмом:

$$\Gamma = \int_{(\Gamma)} \delta q_1 \dots \delta q_s \delta p_1 \dots \delta p_s. \quad (43.3)$$

(см. рисунок, на котором изображено перемещение некоторого ансамбля систем в двумерном фазовом пространстве).

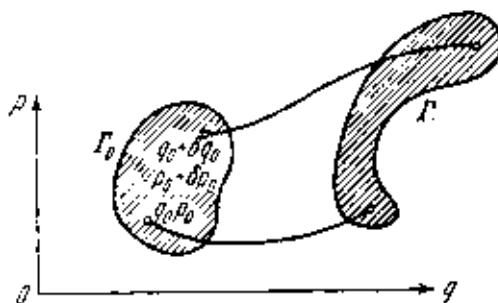


Рис. 1. Перемещение некоторого ансамбля систем в двумерном фазовом пространстве

Найдём соотношение между величинами  $\Gamma$  и  $\Gamma_0$  или закон изменения фазового объёма ансамбля Гиббса. Учитывая, что действительное перемещение каждой системы ансамбля подчинено уравнениям движения, а следовательно, переменные  $q, p$  в момент времени  $t$  являются функциями этих же переменных, взятых в начальный момент времени, запишем фазовый объём  $\Gamma$  в виде интеграла по области  $(\Gamma_0)$ :

$$\Gamma = \int_{(\Gamma_0)} D \delta q_{10} \dots \delta q_{s0} \delta p_{10} \dots \delta p_{s0} \quad (43.4)$$

где  $D = \frac{\partial(q,p)}{\partial(q_0,p_0)}$  – якобиан (так у [4]) преобразования переменных  $q, p$  к значениям этих переменных  $q_0, p_0$  в момент времени  $t_0$ , а функции:

$$q=q(q_0,p_0,t), p=p(q_0,p_0,t)$$

являются решениями уравнений движения.

Из сопоставления (43.4) и (43.2) видно, что задача об отыскании закона изменения  $\Gamma$  сводится к отысканию закона изменения детерминанта якобиана  $D$ .

Здесь  $D$  – детерминант якобиана перехода от одного состояния системы к другому, а  $\dot{x}$  – «фазовый поток». Вывод, что для гамильтоновых систем  $D=\text{const}$  – ошибочен, что подтверждается и экспериментально и теоретически.

Из «теоремы Лиувилля» (ТЛ) следует возвратная теорема Пуанкаре, в соответствии с которой капля чернил, растворившихся в воде непременно должна снова собраться в каплю! Миллиарды наблюдений за многие столетия опровергают этот вывод.

В статистической физике введена характеристика системы – энтропия. Она определяется как  $S=k \ln P$ , где  $S$  – энтропия,  $k$  – константа,  $P$  – вероятность.  $P=\int f(x)dx$  или  $dP=f(x)dx$ , где  $f(x)$  – функция плотности распределения,  $dx$  – интервал области системы, вероятность попасть в который равна  $dP$ , то есть  $dx$  – дифференциально малая область фазового объёма системы. Величины  $S$  и  $x$  связаны прямо пропорциональной зависимостью, однако  $S$  может только возрастать, а  $x$  – (в соответствии с ТЛ) только сохраняться...

В [2] показано, что в действительности в противоречии с ТЛ, для широко используемой системы – линейного осциллятора,  $D \neq const$ .

Это означает, что выражение  $\dot{D}=D \operatorname{div}(\dot{x})$  вовсе не является тривиальным и, как показано в [2], может использоваться как фундаментальный закон, подтверждая несостоятельность ТЛ. Для этого достаточно показать, что хотя одна система противоречит этой «теореме». В качестве таковой выбрана широко распространённая модельная система – линейный осциллятор в режиме свободных колебаний (далее – осциллятор). Эта система как наиболее простая традиционно используется для доказательства истинности ТЛ, основывающегося на вы-

числении дивергенции фазового потока осциллятора  $(\sum_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i})$ , которая, якобы, равна нулю, а поэтому  $dD/dt=D \cdot \sum_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i}=0$ , откуда следует, что  $D=const$ , и, следовательно, фазовый объём системы сохраняется. В работе [5] приведено простое доказательство, подразумевающее, что размерность системы равна 2.

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} = \left( \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial x} \right) \equiv 0.$$

Вычисления выполняются с использованием уравнений Гамильтона  $\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial x}{\partial t}$ , то есть молчаливо предполагается, что число фазовых переменных для данной системы равно двум (обобщенные переменные  $x$  и  $p$ ; заметим, осциллятор линейный (то есть одномерный! – подробнее см. [2]).

Внимательное изучение вычислений и их результатов позволяют усомниться в справедливости традиционных выводов.

Определив систему как совокупность объектов и связей между ними, выделенных из среды на определённое время и с определённой целью, следует считать осциллятор системой с соответствующим фазовым пространством.

Обычно (например, в механике) фазовым пространством называется воображаемое пространство, в частном случае координатными осями которого являются обобщённые координаты  $q$  и обобщённые импульсы  $p$ . Понимается, именно такое задание координат необязательно. Оно определяется исследователем и преследует цели наилучшего описания системы. Например, для описания состояния моля идеального газа обычно используют фазовое пространство с координатами  $P, V, T$  ( $P$  – давление,  $V$  – объём,  $T$  – температура).

Состояние системы в данный момент времени изображается в фазовом пространстве фазовой точкой (а для непрерывных величин, бесконечно малой окрестностью точки).

Совокупность точек может образовывать фазовую траекторию. Совокупность фазовых точек или траекторий составляет фазовое пространство системы.

Изменение состояния системы (изменение фаз системы, то есть фазовых координат системы, а значит фазовых точек – откуда, собственно, термин – фазовое пространство), например, в механике, связано с некоторыми уравнениями движения, то есть, задана определённая функциональная зависимость между координатами.

Так для осциллятора в режиме свободных колебаний уравнение движения можно записать в виде:

$$F=-kx \quad \Rightarrow \quad d^2x/dt^2 + \omega_0^2 x=0.$$

Его решение:

$$x = x_0 \cos \omega_0 t + (v_0/\omega_0) \sin \omega_0 t \rightarrow x=c \cdot \cos(\omega_0 t+\varphi).$$

Не вызывает сомнения, запись этого же решения в общем виде как:

$$x=x(x_0, v_0, t),$$

что является формально точной записью уравнения движения системы в представлении Лагранжа (см. [6]). В обозначениях Ольховского –  $q=q(q_0, p_0, t)$ ,  $p=p(q_0, p_0, t)$ . А фазовую траекторию (фазовый портрет) обычно (в действительности фазовая траектория другая) обычно получают в виде (см. [7]):

$$x^2 + v^2/\omega_0^2 = c^2,$$

то есть в виде эллипса, идентичного приведённому на рис. 2.

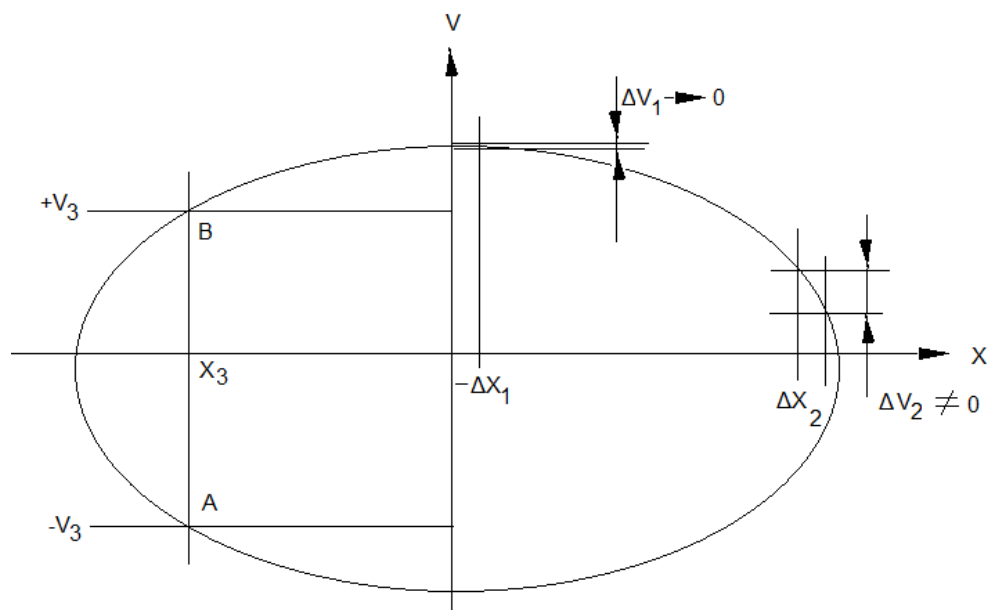
Действительно, поскольку:

$$v=v_0 \cos \omega_0 t - x_0 \omega_0 \sin \omega_0 t \rightarrow v=c \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t+\varphi)$$

то, после несложных преобразований получаем уравнение эллипса.

Сечению фазового портрета (очевидно, что фазовое пространство предполагается двумерным с переменными  $x$  и  $v$ ) прямой, проходящей через точку  $-x_3$  фазовой переменной  $x$ , соответствуют две точки сопряжённой координаты  $v$ :  $A$  и  $B$ , с координатами по оси ординат  $-v_3$  и  $+v_3$ . Таким образом, из всей фазовой плоскости данной координате  $x_3$  соответствуют только две точки, остальные точки не принадлежат фазовому портрету, так как не удовлетворяют уравнению эллипса. Следовательно, фазовым портретом осциллятора является замкнутая кривая – эллипс, а фазовым объёмом системы является длина этой кривой.

Одному и тому же интервалу  $\Delta x$  на разных участках оси абсцисс соответствуют отличающиеся по длине интервалы по оси ординат.

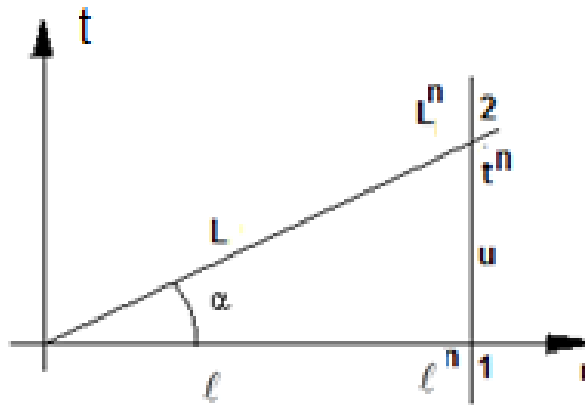


**Рис. 2.** Традиционный фазовый портрет осциллятора. Маленькой буквой  $v$  обозначена одна из фазовых переменных системы, в отличие от большой буквы  $V$ , которой обозначается фазовый объём

На рис. 2  $\Delta x_1 = \Delta x_2$  по построению, однако очевидно, что  $\Delta v_1 \neq \Delta v_2$ ! Следовательно,

$\Delta V_1 = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta v_1^2} \cong \Delta x_1$ , а  $\Delta V_2 = \sqrt{\Delta x_2^2 + \Delta v_2^2}$  и  $\Delta V_2$  отчётливо превышает  $\Delta V_1$  (более, чем в 2 раза!). И это полностью противоречит выводу о сохранении фазового объёма данной системы (даже в течение одного периода). Таким образом, традиционная модель эволюции осциллятора внутренне противоречива, при движении по эллипсу фазовый объём, соответствующий разным состояниям системы меняется в отличие от распространённого мнения.

Как следует из приведённого выше общего вида уравнения движения системы в представлении Лагранжа (см. также [2]) размерность системы равна 3, следовательно, представление  $d\text{tv}(\dot{x})$  в виде суммы состоит из трёх слагаемых и фазовое пространство представляет собой трёхмерную фигуру. Проекция её на плоскость  $OXY$  – эллипс (см. рис. 2), а по оси аппликат координата (время) определяется периодом колебаний осциллятора. То есть, когда точка на плоскости  $OXY$  проходит путь равный длине эллипса  $\ell$ , проходит время равное периоду колебаний осциллятора  $T$ . Учитывая, что в режиме свободных колебаний частота осциллятора не меняется ( $\omega_0 = \text{const}$ ), траектория движения точки представляет собой пространственную винтовую линию, обвивающую воображаемый прямой эллиптический цилиндр. Следовательно, развёртка фазовой траектории представляет собой прямую линию, которая наклонена к горизонтальной оси под постоянным углом  $\alpha$ .



**Рис. 3.** Развёртка эллиптической спирали.  $r$  – ось расстояний (длин эллипса) в развёртке;  $t$  – ось аппликат (время) в развёртке;  $L$  – развёртка винтовой линии, путь проходимый точкой по спирали;  $\ell$  – развёртка эллипса;  $\alpha$  – угол между винтовой линией и плоскостью  $OXY$  (эллипсом);  $t_n$  – длина перпендикуляра и между точками  $L^n(x_n, v_n, t_n)$  и  $\ell^n(x_n, v_n)$

Перпендикуляр  $u$  к оси  $r$  пересечёт наклонную прямую, образуя прямоугольный треугольник, из которого можно найти длину перпендикуляра  $u$  и до точки пересечения:

$$u^2 = L^2 - \ell^2.$$

Поскольку  $\alpha = \text{const}$ , то соотношение  $u^2 = L^2 - \ell^2$  выполняется для любого произвольного положения точки на пространственной кривой, то есть для произвольного момента времени. Соответственно, для дифференциалов:

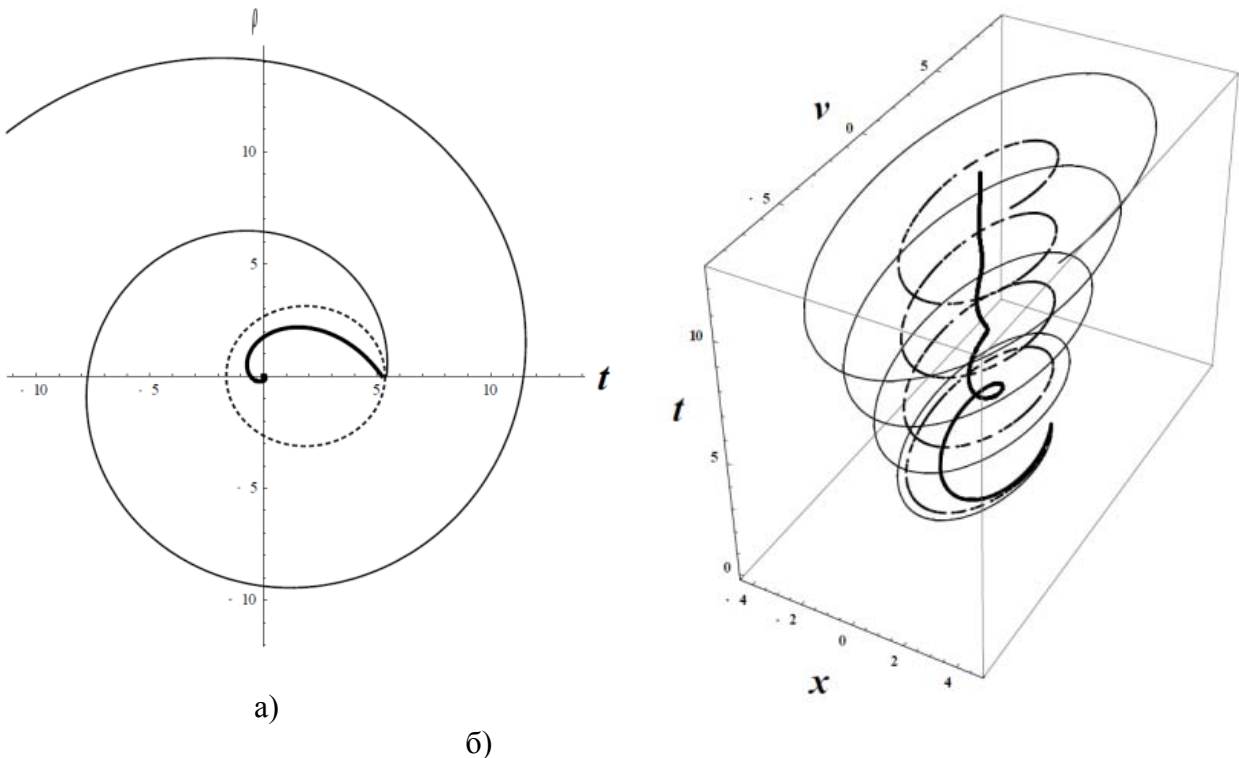
$$du^2 = \frac{(dx^2 + dv^2 + dt^2)}{dt} - \frac{(dx^2 + dv^2)}{dt}$$

Таким образом, для пространственной винтовой линии, обвивающей воображаемый прямой эллиптический цилиндр, шаг между витками равен периоду движения точки по эллипсу, а учитывая, что  $\alpha = \text{const}$ , для произвольной точки:

$$dt = tg\alpha \cdot \sqrt{dx^2 + dv^2}$$

Фазовые портреты осцилляторов во всех режимах отличаются от общепринятых и соответствуют друг другу больше, чем принято традиционно. Обычно считается, что фазовый портрет линейного осциллятора в режиме свободных колебаний, плоская кривая – эллипс (приведён на рисунке 1, 3а) это замкнутая кривая (подробнее см. [2]). Фазовые портреты осцилляторов в режиме затухающих колебаний и в режиме вынужденных колебаний – кривые незамкнутые – логарифмические спирали: соответственно – сходящаяся и расходящаяся (подробнее можно посмотреть, например, в [2 и 7]).

Учтя трёхмерность осциллятора, как это сделано в настоящей статье, фазовые портреты следует изображать иначе (см. рис. 4 б).



**Рис. 4.** а) Фазовые портреты осцилляторов как двумерные системы.

Штрихованная кривая – осциллятор в режиме свободных колебаний (осциллятор 1);

жирная кривая – осциллятор в режиме затухающих колебаний (осциллятор 2);

тонкая кривая – осциллятор в режиме вынужденных колебаний (осциллятор 3).

б) Фазовые портреты осцилляторов как трёхмерные системы. Штрихованная кривая – осциллятор 1; жирная кривая – осциллятор 2; тонкая кривая – осциллятор 3

Как показывает рисунок 4 б), все три фазовых портрета осцилляторов – пространственные спирали: 1) осциллятор 1 – прямая эллиптическая спираль, 2) осциллятор 2 – суживающаяся спираль, 3) осциллятор 3 – расширяющаяся спираль.

#### Результаты исследований и их обсуждение.

Дифференцируя выражения (43.2) и (43.3) из [4] можно получить:

$$d\Gamma_0 = dV_0 \text{ и } d\Gamma = dV,$$

где  $dV_0 = \delta q_{1,0} \dots \delta q_{s,0} \delta p_{1,0} \dots \delta p_{s,0}$ , а  $dV = \delta q_1 \dots \delta q_s \delta p_1 \dots \delta p_s$ . Очевидно, что  $d\Gamma_0$  и  $d\Gamma$  – фазовые объёмы соответствующих систем. Дифференцируя выражение (43.4) можно получить:

$$d\Gamma = DdV_0 \text{ или } dV = DdV_0,$$

то есть,  $D = \frac{\partial(q_i p_i)}{\partial(q_i v_i)} = \frac{dV}{dV_0}$  – одна из форм представления детерминанта перехода.

Пусть задана некая динамическая система, чей явный вид неизвестен, подчиняющаяся, для простоты уравнению движения в представлении Лагранжа с тремя переменными в форме:

$$x = x(x_0, v_0, t),$$

где  $x$  – пространственная координата;  $v$  – скорость;  $t$  – время.

Поскольку переход от  $dV_0$  к  $dV$ , то есть от «старой» системы к «новой» осуществляется с помощью детерминанта  $D$ , а функциональная связь известна, то вид  $D$  устанавливается легко:

$$\begin{cases} x_n = x_n(x_0, v_0, t) \\ v_n = v_n(x_0, v_0, t) \\ t_n = t_n(x_0, v_0, t) \end{cases}$$

Отсюда следует, вводя обозначения «старой» системы буквой  $s$ :

$$\begin{cases} dx_n = \frac{\partial x_n}{\partial x_s} dx_s + \frac{\partial x_n}{\partial v_s} dv_s + \frac{\partial x_n}{\partial t_s} dt_s \\ dv_n = \frac{\partial v_n}{\partial x_s} dx_s + \frac{\partial v_n}{\partial v_s} dv_s + \frac{\partial v_n}{\partial t_s} dt_s \\ dt_n = \frac{\partial t_n}{\partial x_s} dx_s + \frac{\partial t_n}{\partial v_s} dv_s + \frac{\partial t_n}{\partial t_s} dt_s \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} dx_n \\ dv_n \\ dt_n \end{vmatrix} = D \begin{vmatrix} dx_s \\ dv_s \\ dt_s \end{vmatrix}$$

где

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_n}{\partial x_s} & \frac{\partial x_n}{\partial v_s} & \frac{\partial x_n}{\partial t_s} \\ \frac{\partial v_n}{\partial x_s} & \frac{\partial v_n}{\partial v_s} & \frac{\partial v_n}{\partial t_s} \\ \frac{\partial t_n}{\partial x_s} & \frac{\partial t_n}{\partial v_s} & \frac{\partial t_n}{\partial t_s} \end{vmatrix}$$

Пусть для исследуемой системы известен гамильтониан  $H$  и справедливы уравнения

Гамильтона,  $\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p}$ ,  $\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x}$  –  $x$  и  $p$  – обобщённые переменные.  $\frac{\frac{\partial H}{\partial x_s}}{\frac{\partial H}{\partial x_n}} = \frac{\partial x_n}{\partial x_s}$ , поскольку гамильтониан один и тот же и в «старой» системе и в «новой». С другой стороны:

$$\frac{\frac{\partial H}{\partial x_s}}{\frac{\partial H}{\partial x_n}} = \frac{-\dot{p}_s}{-\dot{p}_n} = \frac{\dot{p}_s}{\dot{p}_n}, \quad \text{поэтому } \frac{\partial x_n}{\partial x_s} = \frac{\dot{p}_s}{\dot{p}_n} = \frac{v_s}{v_n},$$

$$\frac{\frac{\partial H}{\partial p_s}}{\frac{\partial H}{\partial p_n}} = \frac{\partial x_n}{\partial p_s} = \frac{\partial x_n}{m \partial v_s} = \frac{v_s}{-p_n} \rightarrow \frac{\partial x_n}{\partial v_s} = -\frac{p_s}{p_n} = -\frac{v_s}{v_n}, \quad \frac{\partial x_n}{\partial t_s} = \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \frac{\partial t_n}{\partial t_s} = v_n \frac{\partial t_n}{\partial t_s}$$



$$\frac{\partial H}{\partial x_s} = \frac{\partial p_n}{\partial x_s} = \frac{-\dot{p}_s}{v_n} \rightarrow \frac{\partial v_n}{\partial x_s} = -\frac{\dot{v}_s}{v_n}, \quad \frac{\partial v_n}{\partial v_s} = \frac{\partial}{\partial v_s} \frac{\partial H}{\partial p_n} = \frac{m \partial^2 H}{\partial v_s \partial p_n},$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial t_s} = \frac{\partial v_n}{\partial t_n} \frac{\partial t_n}{\partial t_s} = \frac{\partial p_n}{m \partial t_n} \frac{\partial t_n}{\partial t_s}$$

$$\frac{\partial t_n}{\partial x_s} = \frac{\partial t_n}{\partial v_n} \frac{\partial v_n}{\partial x_s} = \frac{\partial t_n}{\partial v_n} \left( -\frac{\dot{v}_s}{v_n} \right), \quad \frac{\partial t_n}{\partial v_s} = \frac{\partial t_n}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial v_s} = \frac{\partial t_n}{\partial v_n} \left( -\frac{v_s}{\dot{v}_n} \right)$$

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_n}{\partial x_s} & \frac{\partial x_n}{\partial v_s} & \frac{\partial x_n}{\partial t_s} \\ \frac{\partial v_n}{\partial x_s} & \frac{\partial v_n}{\partial v_s} & \frac{\partial v_n}{\partial t_s} \\ \frac{\partial t_n}{\partial x_s} & \frac{\partial t_n}{\partial v_s} & \frac{\partial t_n}{\partial t_s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\dot{v}_s}{v_n} & -\frac{v_s}{\dot{v}_n} & v_n \frac{\partial t_n}{\partial t_s} \\ -\frac{\dot{v}_s}{v_n} & \frac{m \partial^2 H}{\partial p_s \partial p_n} & \frac{\partial v_n}{\partial t_n} \frac{\partial t_n}{\partial t_s} \\ -\frac{\partial t_n}{\partial v_n} \left( \frac{\dot{v}_s}{v_n} \right) & -\frac{\partial t_n}{\partial v_n} \left( \frac{v_s}{\dot{v}_n} \right) & \frac{\partial t_n}{\partial t_s} \end{vmatrix}$$

$$D = \left( \frac{\partial t_n}{\partial t_s} \right)^2 \cdot \begin{vmatrix} \frac{\dot{v}_s}{v_n} & -\frac{v_s}{\dot{v}_n} & v_n \\ \frac{\dot{v}_s}{v_n} & \frac{m \partial^2 H}{\partial p_s \partial p_n} & \frac{\partial v_n}{\partial t_n} \\ -\frac{\dot{v}_s}{v_n} & -\frac{v_s}{\dot{v}_n} & \frac{\partial v_n}{\partial t_n} \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial t_n}{\partial t_s} \right)^2 \cdot \left( \frac{\dot{v}_s}{v_n} \right) \cdot \left( \frac{v_s}{\dot{v}_n} \right) \cdot \begin{vmatrix} \frac{v_n}{\dot{v}_n} & -1 & v_n \\ -1 & \frac{m \partial^2 H}{\partial p_s \partial p_n} \cdot \frac{\dot{v}_n}{v_s} & \frac{\partial v_n}{\partial t_n} \\ -1 & -1 & \frac{\partial v_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}$$

Если явный вид уравнений движения известен, то и  $D$  можно представить в более удобном виде.

Пусть исследуемая система – линейный осциллятор в режиме свободных колебаний. Решение уравнения движения линейного осциллятора записывается как:

$$x = x_0 \cos \omega_0 t + (v_0/\omega_0) \sin \omega_0 t.$$

Выражения для  $x$  и  $v$  имеют вид:

$$x = x_s \cos \omega_0 t + (v_s/\omega_0) \sin \omega_0 t, \\ v = v_s \cos \omega_0 t - x_s \omega_0 \sin \omega_0 t.$$

Учитывая, что  $t$  – обратная функция к  $x$  ( $t_n$  – обратная функция к  $x_n$ ) можно записать:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = v, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\omega_0^2 x, \text{ (из уравнения осциллятора)}$$

$$\frac{\partial t_n}{\partial x_s} = (\partial t_n / \partial x_n) \cdot (\partial x_n / \partial x_s) = (\partial x_n / \partial x_s) / (\partial x_n / \partial t_n) = (\partial x_n / \partial x_s) / v_n = \cos \omega_0 t / v_n, \\ \frac{\partial t_n}{\partial v_s} = (\partial t_n / \partial v_n) \cdot (\partial v_n / \partial v_s) = (\partial v_n / \partial v_s) / (\partial v_n / \partial t_n) = (\partial v_n / \partial v_s) / (-\omega_0^2 x_n) = \cos \omega_0 t / (-\omega_0^2 x_n).$$

Тогда детерминант для осциллятора приобретёт вид:



$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_n}{\partial x_s} & \frac{\partial x_n}{\partial v_s} & \frac{\partial x_n}{\partial t_s} \\ \frac{\partial v_n}{\partial x_s} & \frac{\partial v_n}{\partial v_s} & \frac{\partial v_n}{\partial t_s} \\ \frac{\partial t_n}{\partial x_s} & \frac{\partial t_n}{\partial v_s} & \frac{\partial t_n}{\partial t_s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\omega_0 t & \frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0} & v_n \frac{\partial t_n}{\partial t_s} \\ -\omega_0 \sin\omega_0 t & \cos\omega_0 t & -\omega_0^2 x_0 \frac{\partial t_n}{\partial t_s} \\ \frac{\cos\omega_0 t}{v_n} & \frac{\cos\omega_0 t}{-\omega_0^2 x_0} & \frac{\partial t_n}{\partial t_s} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\omega_0 t & \frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0} & v_n d_{33} \\ -\omega_0 \sin\omega_0 t & \cos\omega_0 t & -\omega_0^2 x_0 d_{33} \\ \frac{\cos\omega_0 t}{v_n} & \frac{\cos\omega_0 t}{-\omega_0^2 x_0} & d_{33} \end{vmatrix} = d_{33} \cdot \begin{vmatrix} \cos\omega_0 t & \frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0} & v_n \\ -\omega_0 \sin\omega_0 t & \cos\omega_0 t & -\omega_0^2 x_0 \\ \frac{\cos\omega_0 t}{v_n} & \frac{\cos\omega_0 t}{-\omega_0^2 x_0} & 1 \end{vmatrix}$$

$d_{33} = \frac{\partial t_n}{\partial t_s}$  определить несложно.

Как уже было показано:  $dt = \operatorname{tg}\alpha \cdot \sqrt{dx^2 + dv^2}$ . Отсюда легко получить:

$$d_{33} = \frac{dt_n}{dt_s} = \frac{\sqrt{dx_n^2 + dv_n^2}}{\sqrt{dx_s^2 + dv_s^2}}$$

Используя алгебраические дополнения можно получить:

$$D = \det J = d_{33} + \sin(\omega_0 t) \cdot \cos(\omega_0 t) \cdot \left( \frac{v_n}{\omega_0 x_0} - \frac{\omega_0 x_0}{v_n} \right) - 2 \cos^2 \omega_0 t$$

Видно, что даже если в выражении для детерминанта положить  $d_{33}$  равным нулю, то детерминант всё равно будет отличен от нуля (и от константы). Допустимо даже более жёсткое заключение (и более точное), каким бы ни был элемент  $d_{33}$ , детерминант всё равно будет не константой, а функцией и он не равен тождественно нулю. Таким образом, факт  $D \neq \text{const}$  для линейного осциллятора в режиме свободных колебаний можно считать доказанным.

**Выводы:** Приведённый анализ работы осциллятора, показывает, что нет никаких оснований утверждать сохранение фазового объёма осциллятора, поскольку для любого режима его работы  $D(t) \neq \text{const}$ , что показывают рисунки 1 и 3, а значит и  $dD(t)/dt \neq 0$  и, следовательно, в любом режиме работы осциллятор не сохраняет фазовый объём. Для подтверждения истинности высказанного предложения следует приводить как можно больше доказательств, но для его опровержения достаточно единственного. Следовательно, так называемую «теорему Лиувилля» следует считать несостоятельной в отличие от теоремы Жозефа Лиувилля обнародованной им в 1838 году. А это значит, что ни в каких приложениях нельзя считать фазовый объём динамической системы сохраняющимся, в том числе и для предсказания поведения атмосферы и климата.

**Благодарности.** Выражаю благодарность Е.Н. Ерёмченко за доброжелательную поддержку и возможность предложить данную работу вниманию международной конференции «ИнтерКарто/ИнтерГИС-22» «Геоинформационное обеспечение устойчивого развития территорий в условиях глобальных изменений климата».

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

2. В.С. Дацко. Фазовый объём. М., изд. «Лица», 2011. 72 с. (см. также: <http://www.twirpx.com/file/784178/>).
3. И.И. Ольховский. Курс теоретической механики для физиков / гл. ред., ф.-м. лит. М.: Изд. «НАУКА», 1970. С. 376.
4. Я.П. Терлецкий. Статистическая физика. М.: Высшая школа, 1973.
5. Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. Теоретическая гидромеханика, ч. 1, М.: Физматгиз, 1963, 584 с.
6. А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. Теория колебаний. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1959. 918 с.
7. J. Liouville, Journ. de Math. 3, 349 (1838). (URL: [http://books.google.ru/books?id=IUVOAAAAMAAJ&pg=PR6&lpg=PR6&dq=J.+Liouville,+%22Journal+de+Mathematiques%22+1838&source=bl&ots=fXOux62ryi&sig=UUIyMIK4NHq-a09uzmqsv2TDTak&hl=ru&ei=ijSWTdDaDYWE0s3OgdkH&sa=X&oi=book\\_result&ct=result&resnum=1&sqi=2&ved=0CB0Q6AEwAA#v=onepage&q&f=false](http://books.google.ru/books?id=IUVOAAAAMAAJ&pg=PR6&lpg=PR6&dq=J.+Liouville,+%22Journal+de+Mathematiques%22+1838&source=bl&ots=fXOux62ryi&sig=UUIyMIK4NHq-a09uzmqsv2TDTak&hl=ru&ei=ijSWTdDaDYWE0s3OgdkH&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=1&sqi=2&ved=0CB0Q6AEwAA#v=onepage&q&f=false)).
8. M. Ehrendorfer. The Liouville Equation in Atmospheric Predictability. Institut für Meteorologie und Geophysik, Universität Innsbruck, Innrain 52, A-6020 Innsbruck, Austria. [http://imgi.uibk.ac.at/sekretariat/Publikationen/pub\\_pdf/talk\\_ec1\\_els\\_paper.pdf](http://imgi.uibk.ac.at/sekretariat/Publikationen/pub_pdf/talk_ec1_els_paper.pdf).

---

V.S. Datsko<sup>1</sup>

### THE FALLACY OF «LIOUVILLE'S THEOREM» AND PREDICTABLE ATMOSPHERE AND CLIMATE

**Abstract.** *The paper substantiates the fallacy of «Liouville theorem» and, accordingly, the inability to be based on its prediction of the behavior of the atmosphere and climate.*

**Key words:** *predictability of the atmosphere, the phase space, Liouville theorem, Lagrange representation, the oscillator.*

**Acknowledgement.** *I express my gratitude E.N. Eremchenko for friendly support and the opportunity to offer this work to the International Conference InterCarto/InterGIS-22 «GS support of sustainable development of territories in conditions of global climate change».*

### REFERENCES

1. V.S. Datsko. Fazovyy ob»yom [The phase volume]. M.: ed. Lika, 2011. 72 p. (see also: <http://www.twirpx.com/file/784178/>).
2. I.I. Olkhovskiy. Kurs teoreticheskoy mekhaniki dlya fizikov. [The course of theoretical mechanics for physicists]. M.: ed.»SCIENCE, 1970. P. 376.
3. Ya.P. Terletskiy. Statisticheskaya fizika [Statistical physics]. M.: Higher school, 1973.
4. N.E. Cochin, I.A., Kibel, N.In. Rose. Teoreticheskaya gidromekhanika [Theoretical hydro-mechanics], part 1. Moscow: Fizmatgiz, 1963. P. 584.
5. A. Andronov, A.A. Vitt, S.E. Khaikin. Teoriya kolebanij [Theory of oscillations]. Moscow: GOS. ed. Fiz. Mat. lit., 1959. P. 918.
6. J. Liouville, Journ. de Math. 3, 349 (1838). (URL: <http://books.google.ru/books?id=IUVOAAAAMAAJ&pg=PR6&lpg=PR6&dq=J.+Liouville,+%22Journal+de+Mathematiques%22+1838&source=bl&ots=fXOux62ryi&sig=UUIyMIK4NHq-a09uzmqsv2TDTak&hl=ru&ei=ijSWTd>

---

<sup>1</sup> Moscow Region State Educational Institution of higher professional education University «Dubna», filial branch «Protvino»; e-mail: viktor.datsko@gmail.com.

DaDYWE0s3OgdkH&sa=X&oi=book\_result&ct=result&resnum=1&sqi=2&ved=0CB0Q6AEwAA#v=onepage&q&f=false).

7. M. Ehrendorfer. The Liouville Equation in Atmospheric Predictability. Institut für Meteorologie und Geophysik, Universität Innsbruck, Innrain 52, A-6020 Innsbruck, Austria. [http://imgi.uibk.ac.at/sekretariat/Publikationen/pub\\_pdf/talk\\_ec1\\_els\\_paper.pdf](http://imgi.uibk.ac.at/sekretariat/Publikationen/pub_pdf/talk_ec1_els_paper.pdf).

---

УДК 378, 37.01

В.Т. Дмитриева<sup>1</sup>, М.И. Подболотова<sup>2</sup>

## КОНЦЕПЦИЯ «ЦИФРОВОЙ ЗЕМЛИ» В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

**Резюме.** В работе рассматривается феномен «Цифровой Земли» как концепция, которая может быть использована в преподавании географии, и, с другой стороны, как принципиально новый феномен, нуждающийся в специальном обучении работе с ним. Анализируется накопленный опыт использования «Цифровой Земли» в виде геосервиса Google Earth в обучении, рассматривается необходимость специализированного обучения работе с растровыми изображениями, коллаборативному созданию данных, обучению использованию разнородных наборов данных, и анализу динамики процессов во времени для обеспечения устойчивого развития.

**Ключевые слова:** Digital Earth, Google Earth, устойчивое развитие, обучение.

**Введение.** Провозглашение концепции «Цифровой Земли» (Digital Earth) на исходе XX века и ее практическая реализация в начале 2000-х гг. сначала в виде сервиса Google Earth, а затем и иных аналогичных сервисов стали событиями, глубоко трансформировавшими наши представления о географии и о способах работы с геопространственной информацией. Соответственно, встал вопрос об организации и методическом обеспечении обучения новым подходам к работе с геопространственной информацией. Однако эта работа осложнялась отсутствием единой точки зрения на природу происходящих изменений, многообразием новых продуктов и решений, появившихся в изобилии одновременно с «Цифровой Землей», и расхождением в оценке степени новизны этого нового подхода. Дополнительно ситуация осложнялась тем, что практическая реализация нового качества в работе с геоинформацией опередила теоретическое осмысление и обоснование «Цифровой Земли». В результате и теоретические исследования в области «Цифровой Земли», и адаптация обучения осуществлялись в значительной степени методом ad hoc, по наитию. Более того, необходимо было решить двуединую задачу – во-первых, использовать классические средства картографии для обучения использованию возможностей «Цифровой Земли» и, во-вторых, использовать «Цифровую Землю» как учебное пособие в обучении географии, картографии и геоинформатике.

Процесс адаптации учебного процесса к использованию возможностей «Цифровой Земли» в России отличался своей спецификой. Рассмотрим историю адаптации «Цифровой Земли» в России в учебном процессе с момента открытия сервиса Google Earth в 2005 г.

### **История «Цифровой Земли»**

История междисциплинарного научного направления, известного как «Цифровая Земля» (Digital Earth), восходит к речи вице-президента США Альберта Гора, в которой он

---

<sup>1</sup> Московский городской педагогический университет, Институт математики, информатики и естественных наук, кафедра географии, Россия, 129226, к.г.н., профессор; e-mail: dvtmgpu@yandex.ru.

<sup>2</sup> Московский государственный областной университет, географо-экологический факультет, кафедра природопользования и методики обучения географии, Россия, 121127, к.п.н, доцент; e-mail: mar-podbolotova@yandex.ru.