

УДК: 004.67+528.914

DOI: 10.35595/2414-9179-2025-1-31-355-368

О. П. Якимова¹, И. К. Елистратов²

АЛГОРИТМ СОГЛАСОВАННОГО ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО УПРОЩЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОБЪЕКТОВ РАЗЛИЧНОГО ТИПА НА ОСНОВЕ ДИАГРАММЫ ВОРОНОГО

АННОТАЦИЯ

Картографическая генерализация заключается в отборе значимых объектов и явлений для отображения на карте, а также в их обобщении таким образом, чтобы сохранились ключевые особенности, характерные черты и взаимосвязи, соответствующие требованиям конкретной задачи и выбранному масштабу карты. Важнейшим этапом картографической генерализации является геометрическое упрощение линейных и полигональных объектов. Общепринятой является практика независимого упрощения отдельных слоев пространственных данных, что ведет к возникновению топологических конфликтов и требует ручной коррекции ошибок. В настоящей работе предлагается оригинальный алгоритм согласованного геометрического упрощения. На первом этапе работы алгоритма строится триангуляция Делоне для точек из всех слоев пространственных данных. Далее по ней создается диаграмма Вороного. Ячейка диаграммы помечается идентификатором объекта, которому принадлежит точка внутри ячейки, или списком идентификаторов, если точка является точкой пересечения или касания нескольких объектов. Упрощение производится на основе двух правил: точку можно удалить, если угол поворота меньше заданного параметра и если стягивающий отрезок не пересекает ячейку с идентификатором, отличным от того, которым помечена ячейка удаляемой точки. Тестирование предлагаемого алгоритма производилось на фрагментах карт м-ба 1:500 000 и 1:1 000 000. Было произведено сравнение результатов работы алгоритма согласованного упрощения с алгоритмами Дугласа-Пейкера и Висвалингам-Уайатта, реализованными в ГИС QGIS, причем их параметры подбирались так, чтобы в результате было примерно одинаковое количество точек. Слои пространственных данных, упрощенные предлагаемым алгоритмом, не содержат разрывов и наложений объектов, т. е. сохраняют топологические отношения.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: алгоритм согласованного упрощения, топологические отношения, диаграмма Вороного, триангуляция Делоне, пространственные данные

¹ Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, ул. Советская, д. 14, Ярославль, Россия, 150003, *e-mail*: olga_pavl02@mail.ru

² Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, ул. Советская, д. 14, Ярославль, Россия, 150003, *e-mail*: ivan.elistrat@mail.ru

Olga P. Yakimova¹, Ivan K. Elistratov²

ALGORITHM FOR CONSISTENT GEOMETRIC SIMPLIFICATION OF SPATIAL OBJECTS OF VARIOUS TYPES BASED ON THE VORONOI DIAGRAM

ABSTRACT

Cartographic generalization is the process of graphically reducing information from reality or larger-scale maps. The objective is to display only the information necessary at a specific scale. After generalization, maps can show the main things and essential characteristics. The scale, application and theme of maps, geographical features of cartographic regions and graphic dimensions of symbols are the main factors affecting cartographic generalization. Geometric simplification is a fundamental aspect of cartographic generalization. The practice of independently simplifying separate layers of spatial data is common, which leads to topological conflicts and necessitates manual correction of errors. This paper proposes an original algorithm for consistent geometric simplification. In the first step of the algorithm, a Delaunay triangulation is constructed for points from all spatial data layers. A Voronoi diagram is then created using this triangulation. A cell of the diagram is marked with the object identifier to which the point inside the cell belongs, or by a list of identifiers if the point is an intersection or touch point of multiple objects. The simplification is based on two rules: a point can be deleted if the rotation angle is less than a specified parameter and if the constricting segment does not intersect a cell with an identifier different from the one marking the cell of the point to be deleted. The proposed algorithm was tested on fragments of 1:500 000 and 1:1 000 000 scale maps. The results of the consistent simplification algorithm were compared with the Douglas-Peucker and Visvalingham-Whyatt algorithms implemented in QGIS, and their parameters were chosen so that the result was approximately the same number of points. The spatial data layers simplified by the proposed algorithm do not contain discontinuities and overlaps of objects, i. e. they preserve topological relations.

KEYWORDS: consistent simplification algorithm, topological relations, Voronoi diagram, Delaunay triangulation, spatial data

ВВЕДЕНИЕ

Картографическая генерализация заключается в отборе значимых объектов и явлений для отображения на карте, а также в их обобщении таким образом, чтобы сохранились ключевые особенности, характерные черты и взаимосвязи, соответствующие требованиям конкретной задачи и выбранному масштабу карты [Салищев, 1976; Берлянт, 2014]. Важнейшим этапом картографической генерализации является геометрическое упрощение линейных и полигональных объектов. В течение последних десятилетий было разработано значительное количество алгоритмов, осуществляющих эту операцию. Часть из них являются универсальными, т. е. применимы к линейным или полигональным объектам любой природы. Здесь можно отметить хорошо известные алгоритмы Дугласа-Пейкера [Douglas, Peucker, 1973], Мак-Мастера [McMaster, 1987], Висвалингам-Уайатта [Visvalingham, Whyatt, 1993], Свентэка [1999]. Другие же являются специализированными, т. е. хорошо подходят для упрощения зданий или береговых линий [Wang, Muller, 1993; Wei et al., 2021]. Большинство из них используют различные геометрические критерии для сокращения количества точек исходной линии.

¹ Demidov Yaroslavl State University, 14, Sovetskaya str., Yaroslavl, 150003, Russia,
e-mail: olga_pavl02@mail.ru

² Demidov Yaroslavl State University, 14, Sovetskaya str., Yaroslavl, 150003, Russia,
e-mail: ivan.elistrat@mail.ru

Важно отметить, что различные виды преобразований карт способны нарушать изначальные соотношения между элементами, особенно учитывая традиционную практику независимого упрощения отдельных классов объектов (каждый слой данных обрабатывается отдельно) [Dettori, Puppo, 1996]. Таким образом, задача устранения возникающих топологических несоответствий становится центральной проблемой цифровой генерализации карт, решение которой активно изучается специалистами с момента зарождения данной тематики [Rhind, 1973; Monmonier, 1987].

Так, исследователями были предложены модификации алгоритмов геометрического упрощения, которые исключали самопересечение линий и следили за топологической корректностью обрабатываемых объектов [De Berg et al., 1998; Saalfeld, 1999]. Другой подход для решения топологических конфликтов заключается в генерализации линейных картографических объектов на основе различных разбиений (покрытий) карты, например триангуляции Делоне [Van Der Poorten, Jones, 2002], квадратных [Li, Openshaw, 1992] и гексагональных [Raposo, 2013]. Следует отметить, что все эти методы работают исключительно для одного слоя линейных объектов.

В работах [Самсонов и др., 2014; Якимова и др., 2023] предлагается иной подход, а именно совместное упрощение нескольких слоев пространственных данных. При этом в первой из упомянутых работ все линейные слои проецируются на один слой, в этом слое определяются дополнительные вершины — точки пересечения объектов из разных слоев, а дальше производится упрощение на основе специальной процедуры, сохраняющей топологические отношения. Стоит учесть, что данный подход не учитывает слои точечных и площадных объектов. В статье [Якимова и др., 2023] все слои пространственных данных — линейные, полигональные, точечные — заносятся в сеточную структуру данных, что позволяет построить для каждого объекта последовательность ячеек, которым принадлежат его точки. В случае, когда в ячейке находятся точки только одного объекта, его упрощение производится в рамках этой ячейки; иначе используется специальная процедура, сохраняющая топологические отношения. Затем упрощенные слои пространственных данных сохраняются по отдельности. Данный алгоритм корректно проводит геометрическое упрощение всех типов объектов, но они имеют различную детализацию в зависимости от плотности распределения точек.

Целью настоящего исследования является новый алгоритм согласованного упрощения объектов различного типа, сохраняющий их топологические отношения.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Исходными данными для предлагаемого алгоритма является набор слоев пространственных данных. Каждый слой представляет собой определенный вид объектов — дороги, реки, водные объекты, населенные пункты и т. п. — и имеет один тип геометрии, т. е. содержит линейные, площадные (полигональные) или точечные объекты. Основные шаги алгоритма:

1. Создание триангуляции Делоне [Делоне, 1934]. Слои данных последовательно просматриваются, точки каждого объекта добавляются в триангуляцию.
2. Построение диаграммы Вороного [Voronoi, 1908]. Для множества S всех точек, составляющих картографические объекты, производится разбиение плоскости на выпуклые многоугольники (ячейки), когда каждый из них ограничивает множество точек q , которые находятся ближе к точке s_i внутри этого многоугольника, чем ко всем остальным точкам s_j исходного множества S .
3. Проведение упрощения. Алгоритм упрощения имеет единственный параметр — размер угла — и учитывает прохождение упрощаемой линии по диаграмме Вороного.

Далее шаги алгоритма будут описаны более подробно.

Для создания триангуляции Делоне берется ограничивающий прямоугольник для фрагмента векторной карты, подлежащего дальнейшему геометрическому упрощению. Диагональ разбивает прямоугольник на два треугольника. Таким образом мы получили триангуляцию, которая будет достраиваться при добавлении реальных точек, представляющих собой объекты исходного набора векторных данных.

При добавлении очередной точки возможны два случая: точка находится внутри триангуляции или точка попадает на границу. В первом случае все треугольники, в описанную окружность которых попадает данная точка, перестраиваются таким образом, чтобы условие Делоне (нет треугольников, в описанную окружность которых входит точки, не являющиеся вершинами данного треугольника) продолжало выполняться. Во втором — треугольник делится на два и также проверяется условие Делоне. Подробнее об алгоритмах построения триангуляции можно посмотреть в [Скворцов, 2002].

После создания триангуляции происходит построение диаграммы Вороного вокруг точек исходного набора данных. Ячейка создается следующим образом:

- выбираются треугольники триангуляции, одна из вершин которых является исходной точкой;
- вычисляются центры описанных окружностей найденных треугольников;
- строится замкнутая область по центрам вычисленных окружностей (см. рис. 1а).

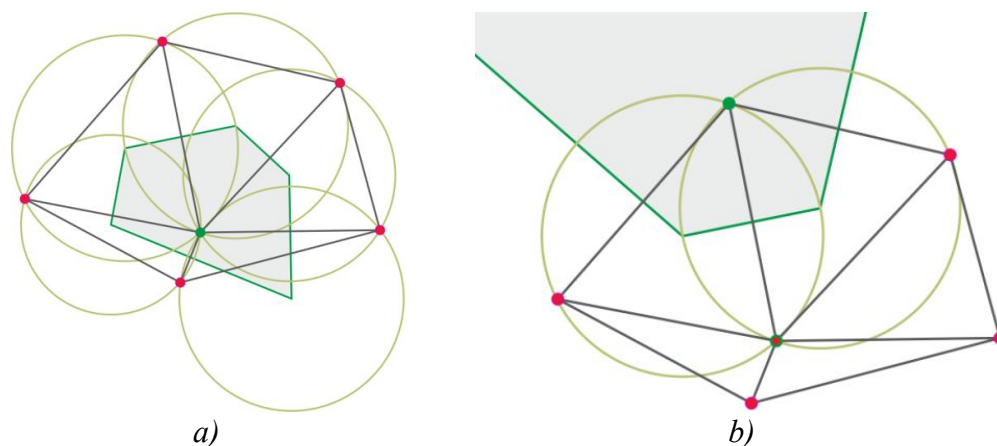


Рис. 1. Построение ячейки Вороного по триангуляции
Fig. 1. Construction of a Voronoi cell by triangulation

В случае, когда исходная точка является точкой границы триангуляции, разделительная линия проводится до границы ограничивающего прямоугольника (см. рис. 1б). После создания каждая ячейка помечается идентификатором объекта, которому принадлежит исходная точка, или списком идентификаторов, если точка относится к нескольким объектам. Так, например, точка впадения притока в реку будет иметь два или три идентификатора — притока, реки или притока, части реки до впадения и после впадения.

При проведении геометрического упрощения учитываются два условия. Первое из них связано с углом поворота текущего отрезка ломаной линии: точка может быть удалена, если при этом происходит сдвиг отрезка на угол, меньший заданного. На рис. 2 приведен фрагмент линейного объекта и продемонстрирован процесс редукции точек. Угол между точками p_2 , p_1 и p_3 меньше эталонного (на рис. 2, слева внизу), поэтому точка p_2 удаляется. Рассматривается следующая тройка точек p_1 , p_3 и p_4 — здесь угол у p_1 больше заданного; происходит сдвиг на одну вершину и вычисляется угол при p_3 , который также больше

эталона. Процесс продолжается, и следующими удаляются точки p_6 и p_7 , т. к. угол при вершине p_5 меньше заданного.

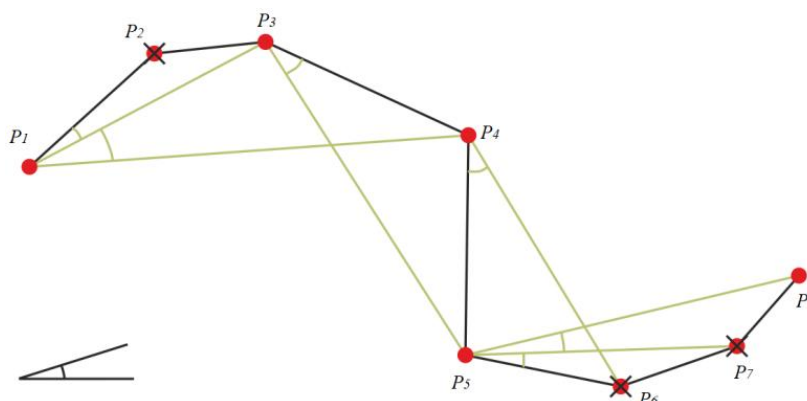


Рис. 2. Удаление точек согласно углу поворота
Fig. 2. Delete points based on the rotation angle

Вторым условием является принадлежность ячейке: отрезок, проведенный мимо удаляемой точки, не должен пересекать границ ячеек, помеченных другим идентификатором.

На рис. 3 красной линией обозначена граница между ячейками диаграммы Вороного, соответствующими разным линейным объектам. Точка p_2 удаляется, т. к. угол при вершине p_1 меньше заданного и отрезок p_1p_3 проходит по ячейкам, принадлежащим этому объекту. Точка p_3 остается, т. к. отрезок p_1p_4 пересекает ячейку, соответствующую другому объекту, в то время как p_4 может быть удалена.

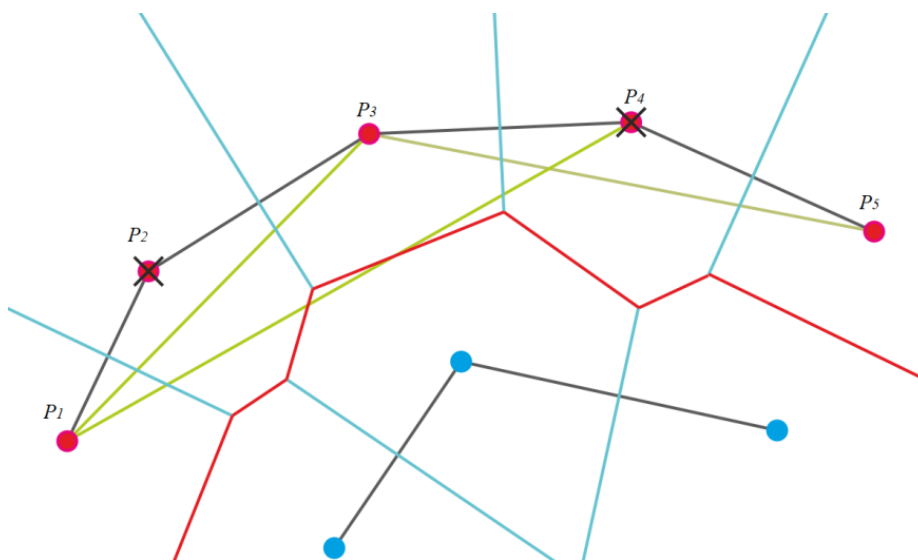


Рис. 3. Процесс упрощения
Fig. 3. Simplification process

На рис. 4 приведен еще один пример работы представляемого алгоритма. В данном случае может быть удалена только точка p_3 .

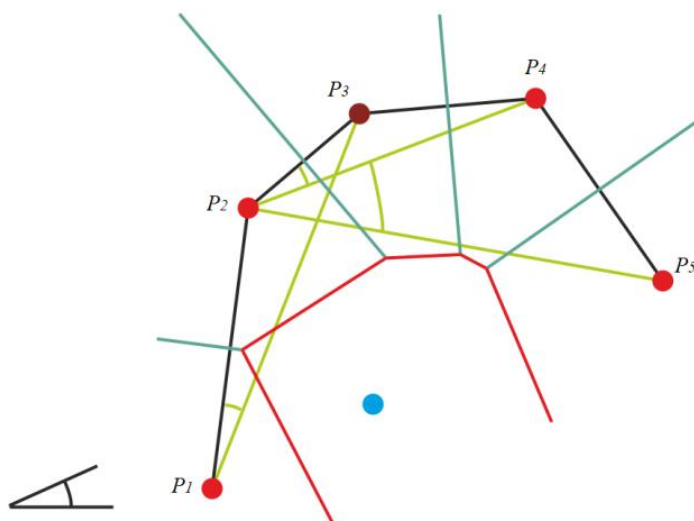


Рис. 4. Пример работы алгоритма
Fig. 4. One example of how the algorithm works

В процессе обработки последовательно рассматриваются все линейные и полигональные объекты набора исходных данных. В качестве текущей алгоритм начинает рассматривать вторую точку объекта, т. е. крайние точки каждого объекта остаются неизменными. Не подлежат удалению и точки, имеющие два и более идентификатора, т. е. являющиеся точками пересечения или касания различных объектов. После проведения обработки упрощенные объекты сохраняются в новые слои данных согласно их типу и геометрии.

Для оценки точности пространственного позиционирования будет использоваться модифицированное расстояние Хаусдорфа (*MHD*), введенное и исследованное в работе [Dubuisson, Jain, 1994]. Оно определяется следующим образом. Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ — два множества точек, а $d(x, y)$ — евклидово расстояние между двумя точками. Среднее расстояние между A и B может быть вычислено по формуле (1):

$$\bar{d}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{a_i \in A} d(a_i, B), \text{ где } d(a_i, B) = \min_{b_j \in B} d(a_i, b_j) \quad (1).$$

С помощью симметричной формулы (2) будет вычисляться среднее расстояние между B и A :

$$\bar{d}(B, A) = \frac{1}{m} \sum_{b_j \in B} d(b_j, A), \text{ где } d(b_j, A) = \min_{a_i \in A} d(b_j, a_i) \quad (2).$$

Тогда модифицированное расстояние Хаусдорфа будет вычисляться так (3):

$$MHD(A, B) = \max(\bar{d}(A, B), \bar{d}(B, A)) \quad (3).$$

Чем меньше *MHD*, тем ближе исходная линия к упрощенной. Использование среднего значения расстояния позволяет снизить влияние выбросов — единичных точек, сильно удаленных от исходного положения.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Тестирование разработанного алгоритма производилось на фрагментах карты Российской Федерации м-бов 1:500 000 и 1:1 000 000. Исходные данные представлены на рис. 5 и рис. 10а и представляют собой прямоугольные участки размером 60×30 км. Они были упрощены предлагаемым алгоритмом с параметром 30°. Для сравнения эти же фрагменты были упрощены в геоинформационной системе QGIS с помощью алгоритмов Дугласа-Пейкера и Висвалингам-Уайатта. Параметры этих алгоритмов подбирались таким образом, чтобы на выходе получился примерно тот же уровень детализации. Результаты упрощения представлены на рис. 6–11.

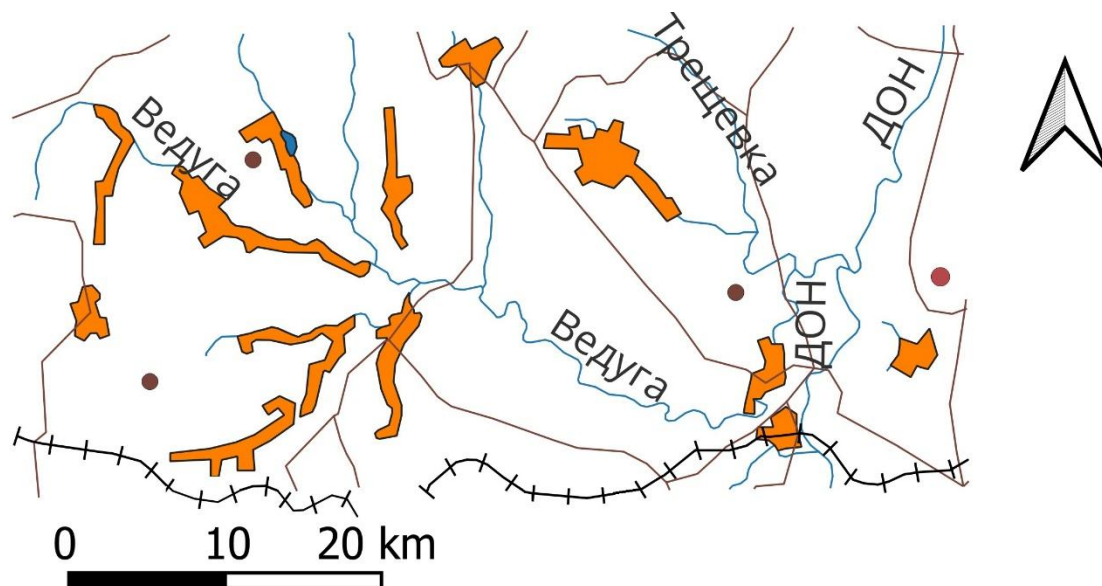


Рис. 5. Фрагмент карты Воронежской области м-ба 1:1 000 000
Fig. 5. A fragment of a map of the Voronezh Region at a scale of 1:1 000 000

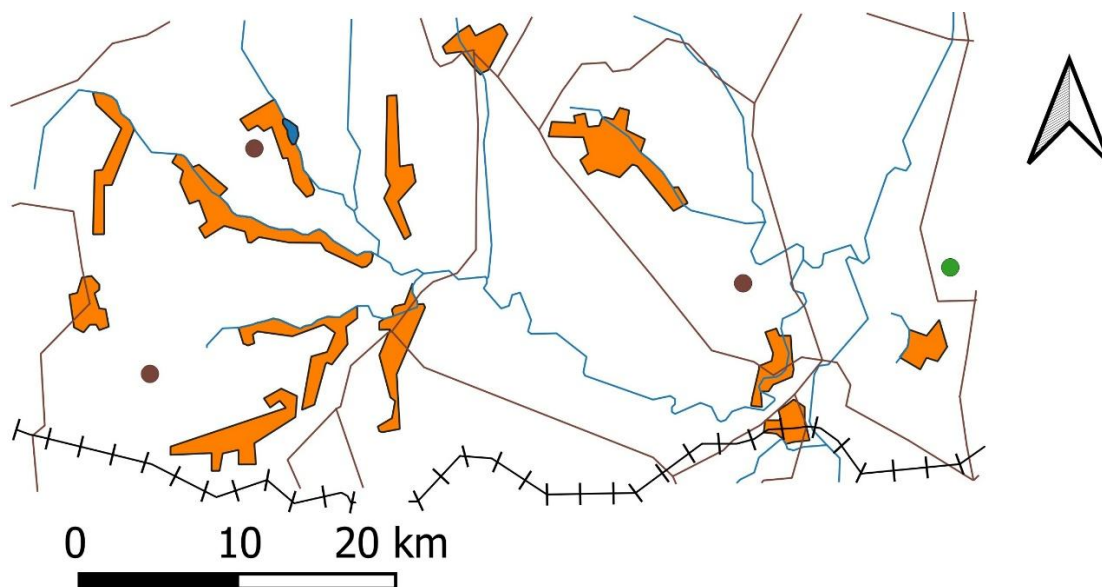


Рис. 6. Результат упрощения предлагаемым алгоритмом
Fig. 6. The result of simplification by the proposed algorithm

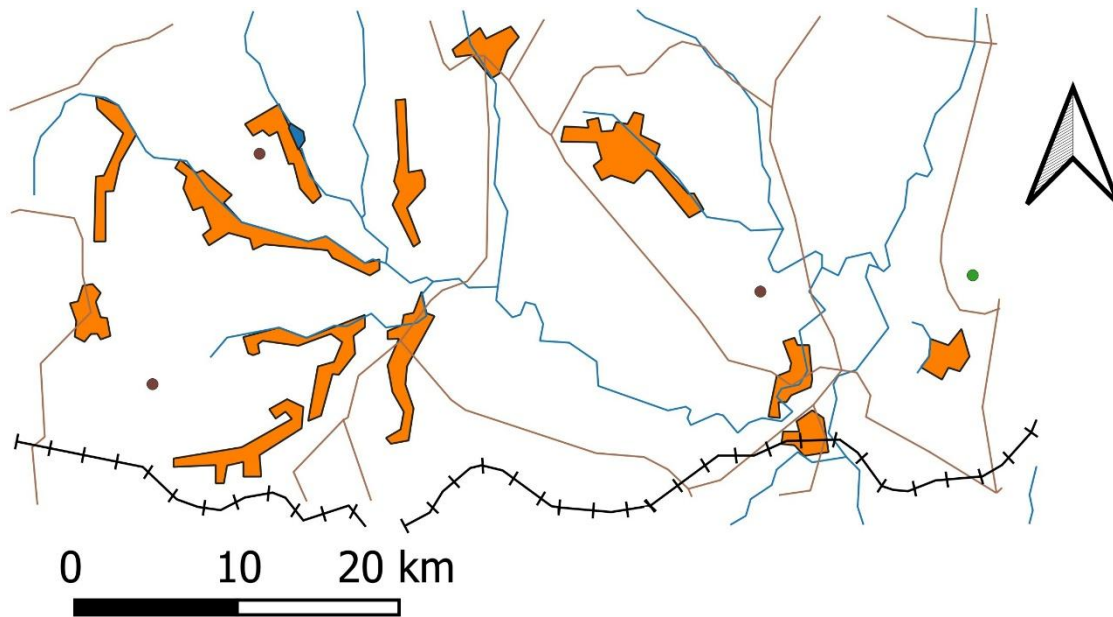


Рис. 7. Результат упрощения алгоритмом Дугласа-Пейкера
Fig. 7. The result of simplification by the Douglas-Peucker algorithm

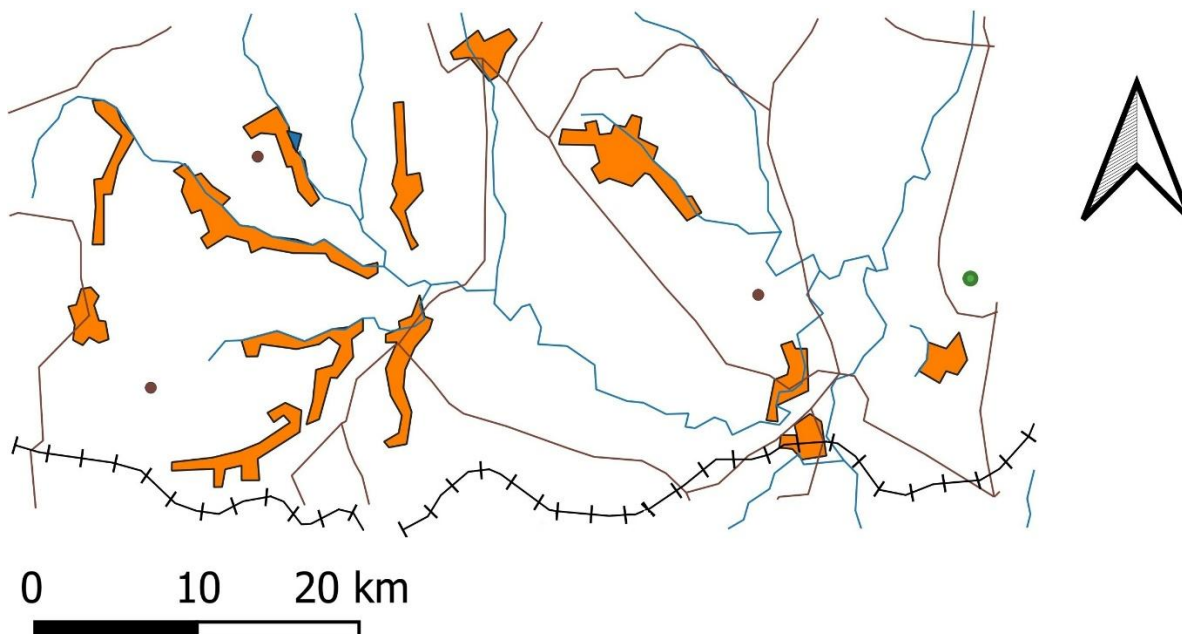


Рис. 8. Результат упрощения алгоритмом Висвалингам-Уайатта
Fig. 8. The result of simplification by the Visvalingham-Whyatt algorithm

На рис. 9 и рис. 11 приведены увеличенные фрагменты упрощенных данных. Легко видно, что предлагаемый алгоритм производит редуцирование точек таким образом, что сохраняется связность и согласованность данных. В то же время там, где в окружении объекта достаточно свободного места, линия упрощается сильнее. На рис. 6 справа дорога имеет более спрямленную форму, чем аналогичные линии на рис. 7 и 8. В табл. 1 приведены значения модифицированного расстояния Хаусдорфа (*MHD*) между исходными и упрощен-

ными объектами. Легко видно, что форма упрощенных предлагаемым алгоритмом объектов ближе к исходной для границ населенных пунктов или водоемов, т. е. там, где требовалось согласование контуров. И наоборот, MHD больше, например, для слоя железных дорог, где предлагаемый алгоритм сильнее сократил количество точек в тех местах, где не было примыкающих объектов.

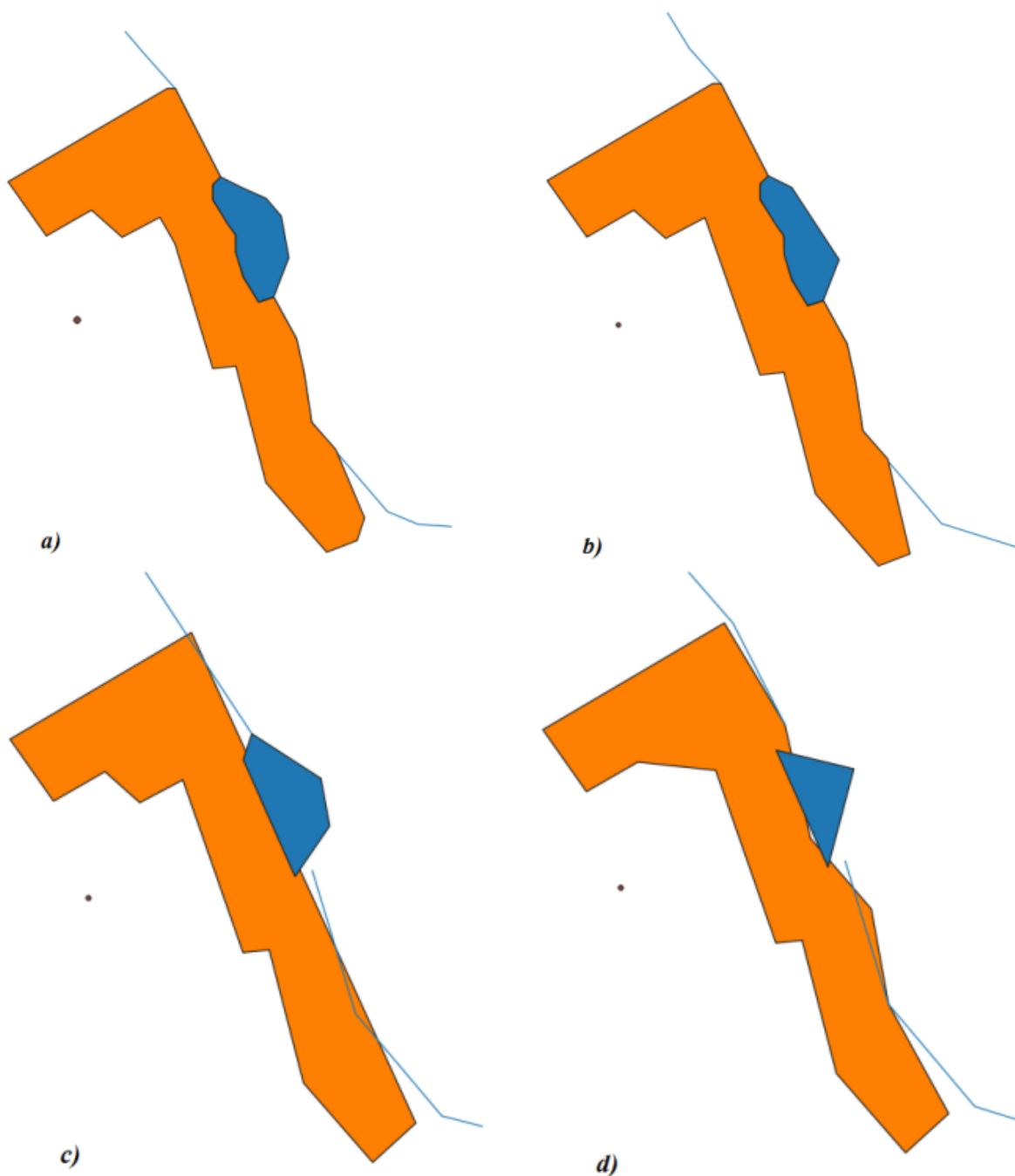


Рис. 9. а) Исходный фрагмент. После упрощения: б) предлагаемым алгоритмом, в) алгоритмом Дугласа-Пейкера, д) алгоритмом Висвалингам-Уайатта
Fig. 9. a) Small piece of data. After simplification: b) by the proposed algorithm, c) by the Douglas-Peucker algorithm, d) by the Visvalingham-Whyatt algorithm

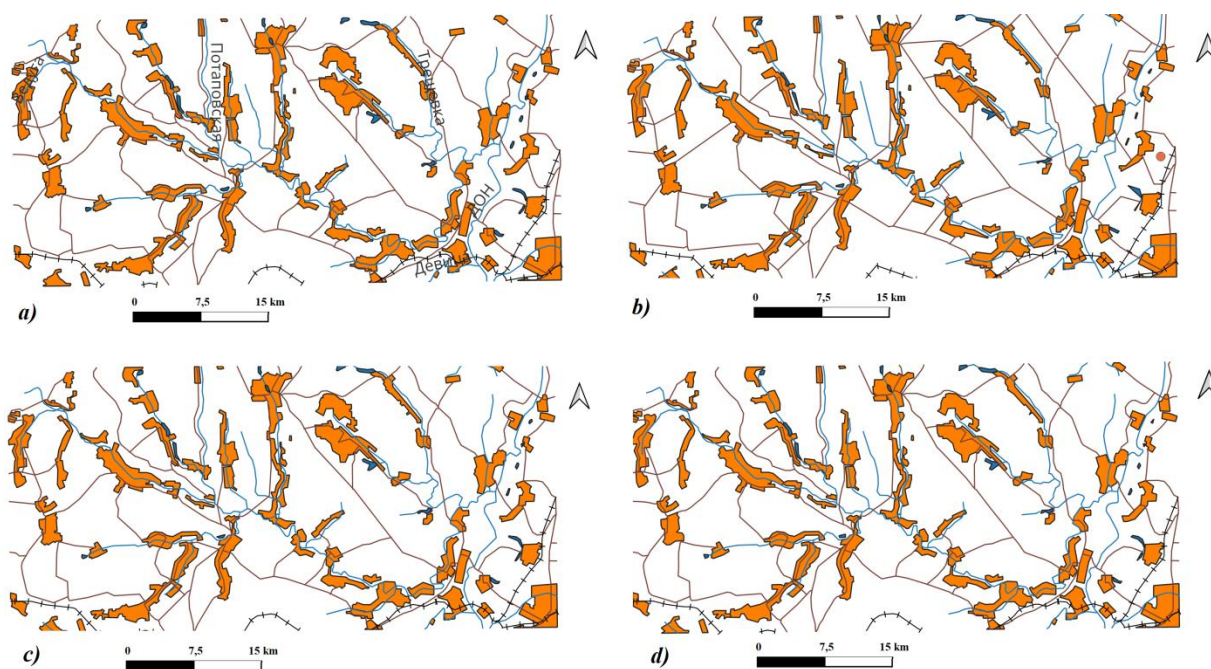


Рис. 10. а) Исходные данные. Результат упрощения: б) предлагаемым алгоритмом, в) алгоритмом Дугласа-Пейкера, д) алгоритмом Висвалингам-Уайатта
Fig. 10. a) Input data. After simplification: b) by the proposed algorithm, c) by the Douglas-Peucker algorithm, d) by the Visvalingham-Whyatt algorithm

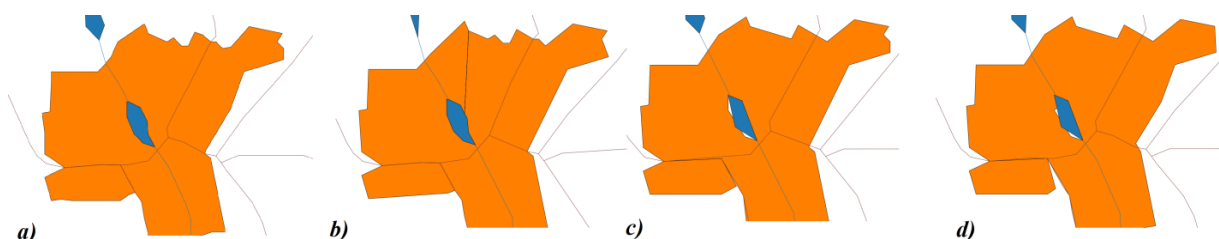


Рис. 11. а) Исходный фрагмент. Результат упрощения: б) предлагаемым алгоритмом, в) алгоритмом Дугласа-Пейкера, д) алгоритмом Висвалингам-Уайатта
Fig. 11. a) Small piece of data. After simplification: b) by the proposed algorithm, c) by the Douglas-Peucker algorithm, d) by the Visvalingham-Whyatt algorithm

Предлагаемый алгоритм согласованного геометрического упрощения реализован на языке C#¹. В настоящий момент программное обеспечение проходит государственную регистрацию. Были проведены замеры времени выполнения алгоритмов на компьютере со следующими спецификациями: Intel(R) Core(TM) i5-3570K CPU @ 3.40GHz, RAM 16Gb. Для тестирования использовались два фрагмента цифровых карт, первый из которых содержал пять слоев пространственных данных на территорию 60×30 км с общим количеством точек в 4 570. Второй фрагмент содержал шесть слоев пространственных данных на территорию 200×280 км с общим количеством точек в 29 442. Результаты приведены в табл. 2. Следует отметить, что основное время работы предлагаемого алгоритма тратится на построение триангуляции Делоне и диаграммы Вороного. Для ускорения процесса

¹ Joint simplification algorithm for different types of spatial objects on the basis of Voronoi diagram. Электронный ресурс: <https://github.com/olyakmva/VoronoiProject> (дата обращения 16.06.2025)

целесообразно использовать аналог пространственного индекса для поиска ближайшего треугольника к точке.

Табл. 1. Модифицированное расстояние Хаусдорфа
между исходными и упрощенными объектами
Table 1. Modified Hausdorff distance between original and simplified objects

Объекты	Исходное кол-во точек	Предлагаемый алгоритм		Алгоритм Дугласа-Пейкера		Алгоритм Висвалингам-Уайатта	
		Кол-во точек	MHD	Кол-во точек	MHD	Кол-во точек	MHD
Фрагмент карты м-ба 1:1 000 000							
Реки	441	248	8	177	7	197	7
Водоемы	14	13	1	6	9	5	17
Границы населенных пунктов	335	283	5	217	5	244	6
Дороги	165	138	11	124	12	162	5
Железные дороги	87	38	8	40	6	50	3
Фрагмент карты м-ба 1:500 000							
Реки	1 059	529	3	403	2	454	2
Водоемы	239	159	4	131	5	146	7
Границы населенных пунктов	2 126	1 624	2	1 325	2	1 267	5
Дороги	1 059	589	7	434	3	675	2
Железные дороги	128	61	4	51	4	101	3

Табл. 2. Время выполнения алгоритмов (в секундах)
Table 2. Algorithms execution time (in seconds)

Объекты	Исходное кол-во точек	Предлагаемый алгоритм	Алгоритм Дугласа-Пейкера	Алгоритм Висвалингам-Уайатта
Фрагмент карты м-ба 1:500 000	4 570	16,6	0,005	0,03
Фрагмент карты м-ба 1:1 000 000	29 442	754	0,26	2,18

ВЫВОДЫ

В настоящей работе предлагается алгоритм совместного геометрического упрощения пространственных данных разного типа на основе диаграммы Вороного. Основным преимуществом алгоритма является сохранение топологических отношений картографических объектов. Минусом алгоритма является скорость работы, которая выше по сравнению с хорошо известными методами, такими как алгоритм Дугласа-Пейкера или Висвалингам-Уайатта. В дальнейшем планируется провести модификацию алгоритма для ускорения его работы и реализовать плагин для QGIS, а также произвести сравнительный анализ с алгоритмами, представленными в работах [Самсонов и др., 2014; Якимова и др., 2023].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Берлянт А. М.* Картография. 4-е изд. М.: КДУ, 2014. 448 с.
- Делоне Б. Н.* О пустоте сферы. Известия АН СССР, ОМОН, 1934. № 4. С. 793–800.
- Салищев К. А.* Картоведение. 1-е изд. М.: Издательство Московского университета, 1976. 438 с.
- Самсонов Т. Е., Якимова О. П., Алексеев В. В., Богаевская В. Г., Горохов А. А., Князев В. Н., Преображенская М. М., Ухалов А. Ю., Эдельсбруннер Х.* Алгоритм геометрического упрощения множества линий путем стягивания ребер графа с сохранением топологии. Геодезия и картография, 2014. № 3. С. 29–36. DOI: 10.22389/0016-7126-2014-885-3-29-36.
- Свентэк Ю. В.* Теоретические и прикладные аспекты современной картографии. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 80 с.
- Скворцов А. В.* Обзор алгоритмов построения триангуляции Делоне. Вычислительные методы и программирование, 2002. Т. 3. Вып. 1. С. 14–39.
- De Berg M., Van Kreveld M., Schirra S.* Topologically Correct Subdivision Simplification Using the Bandwidth Criterion. Cartography and Geographic Information Science, 1998. V. 25. P. 243–257. DOI: 10.1559/152304098782383007.
- Dettori G., Puppo E.* How Generalization Interacts with the Topological and Metric Structure of Maps, in Proceedings of the VII International Symposium on Spatial Data Handling, 1997. P. 559–570.
- Douglas D. H., Peucker T. K.* Algorithms for the Reduction of the Number of Points Required to Represent a Digitized Line or its Caricature. Canadian Cartographer, 1973. V. 10. No. 2. P. 112–122.
- Dubuisson M. P., Jain A.* A Modified Hausdorff Distance for Object Matching. Proceedings of XII International Conference on Pattern Recognition. IEEE Computer Society Press, 1994. V. 1. P. 566–568. DOI: 10.1109/ICPR.1994.576361.
- Li Z., Openshaw S.* Algorithms for Automated Line Generalization Based on a Natural Principle of Objective Generalization. International Journal of Geographical Information Systems, 1992. V. 6. No. 5. P. 373–389. DOI: 10.1080/02693799208901921.
- McMaster R. B.* Automated Line Generalization. Cartographica: The International Journal for Geographic Information and Geovisualization, 1987. V. 24. No. 2. P. 74–111. DOI: 10.3138/3535-7609-781G-4L20.
- Monmonier M.* Displacement in Vector-And Raster-Mode Graphics. Cartographica: The International Journal for Geographic Information and Geovisualization, 1987. V. 24. No. 4. P. 25–36. DOI: 10.3138/FW8R-2122-PT42-53M2.
- Raposo P.* Scale-Specific Automated Line Simplification by Vertex Clustering on a Hexagonal Tessellation. Cartography and Geographic Information Science, 2013. V. 40. No. 5. P. 427–443. DOI: 10.1080/15230406.2013.803707.
- Rhind D.* Generalization and Realism Within Automated Cartographic System. Canadian Cartographer, 1973. V. 10. No. 1. P. 51–62.
- Saalfeld A.* Topologically Consistent Line Simplification with the Douglas-Peucker Algorithm. Cartography and Geographic Information Science, 1999. V. 26. No. 1. P. 7–18. DOI: 10.1559/152304099782424901.
- Van Der Poorten P. M., Jones C. B.* Characterisation and Generalisation of Cartographic Lines Using Delaunay Triangulation. International Journal of Geographical Information Science, 2002. V. 16. No. 8. P. 773–794. DOI: 10.1080/13658810210149434.

Visvalingham M., Whyatt J. Line Generalization by Repeated Elimination of Points. *Cartographic Journal*, 1993. V. 30. No. 1. P. 46–51. DOI: 10.1179/000870493786962263.

Voronoi G. F. Nouvelles Applications des Paramètres Continus à la Théorie des Formes Quadratiques. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 1908. V. 134. P. 198–287. DOI: 10.1515/crll.1908.133.97/html.

Wang Z., Muller J. C. Complex Coastline Generalization. *Cartography and Geographic Information Systems*, 1993. V. 20. Iss. 2. P. 96–106. DOI: 10.1559/152304093782610333.

Wei Z., Liu Y., Cheng L., Ding S. A Progressive and Combined Building Simplification Approach with Local Structure Classification and Backtracking Strategy. *ISPRS International Journal of Geo-Information*, 2021. V. 10. Iss. 5. Art. 302. DOI: 10.3390/ijgi10050302.

Yakimova O. P., Murin D. M., Gorshkov V. G. Joint Simplification of Various Types of Spatial Objects While Preserving Topological Relations. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2024. V. 58. No. 7. P. 202–212. DOI: 10.3103/S0146411624700378.

REFERENCES

Berlyant A. M. *Cartography*. 4th ed. Moscow: KDU, 2014. 448 p. (in Russian).

De Berg M., Van Kreveld M., Schirra S. Topologically Correct Subdivision Simplification Using the Bandwidth Criterion. *Cartography and Geographic Information Science*, 1998. V. 25. P. 243–257. DOI: 10.1559/152304098782383007.

Delone B. N. On the Emptiness of a Sphere. *News of the Academy of Sciences of USSR, Department of Mathematical and Natural Sciences*, 1934. No. 4. P. 793–800 (in Russian).

Dettori G., Puppo E. How Generalization Interacts with the Topological and Metric Structure of Maps, in *Proceedings of the VII International Symposium on Spatial Data Handling*, 1997. P. 559–570.

Douglas D. H., Peucker T. K. Algorithms for the Reduction of the Number of Points Required to Represent a Digitized Line or its Caricature. *Canadian Cartographer*, 1973. V. 10. No. 2. P. 112–122.

Dubuisson M. P., Jain A. A Modified Hausdorff Distance for Object Matching. *Proceedings of XII International Conference on Pattern Recognition*. IEEE Computer Society Press, 1994. V. 1. P. 566–568. DOI: 10.1109/ICPR.1994.576361.

Li Z., Openshaw S. Algorithms for Automated Line Generalization Based on a Natural Principle of Objective Generalization. *International Journal of Geographical Information Systems*, 1992. V. 6. No. 5. P. 373–389. DOI: 10.1080/02693799208901921.

McMaster R. B. Automated Line Generalization. *Cartographica: The International Journal for Geographic Information and Geovisualization*, 1987. V. 24. No. 2. P. 74–111. DOI: 10.3138/3535-7609-781G-4L20.

Monmonier M. Displacement in Vector-And Raster-Mode Graphics. *Cartographica: The International Journal for Geographic Information and Geovisualization*, 1987. V. 24. No. 4. P. 25–36. DOI: 10.3138/FW8R-2122-PT42-53M2.

Raposo P. Scale-Specific Automated Line Simplification by Vertex Clustering on a Hexagonal Tessellation. *Cartography and Geographic Information Science*, 2013. V. 40. No. 5. P. 427–443. DOI: 10.1080/15230406.2013.803707.

Rhind D. Generalization and Realism Within Automated Cartographic System. *Canadian Cartographer*, 1973. V. 10. No. 1. P. 51–62.

Saalfeld A. Topologically Consistent Line Simplification with the Douglas-Peucker Algorithm. *Cartography and Geographic Information Science*, 1999. V. 26. No. 1. P. 7–18. DOI: 10.1559/152304099782424901.

Salishchev K. A. *Cartography*. 1 ed. Moscow: Moscow University Press, 1976. 438 p. (in Russian).

Samsonov T. E., Yakimova O. P., Alekseev V. V., Bogaevskaya V. G., Gorokhov A. A., Knyazev V. N., Preobrazhenskaya M. M., Ukhalov A. Yu., Edelsbrunner H. An Algorithm for Geometric Simplification of a Set of Lines by Contracting Graph Edges While Preserving Topology. *Geodesy and Cartography*, 2014. No. 3. P. 29–36 (in Russian). DOI: 10.22389/0016-7126-2014-885-3-29-36.

Skvortsov A. V. A Review of Algorithm for Constructing the Delaunay Triangulation. *Numerical Methods and Programming*, 2002. V. 3. Iss. 1. P. 14–39 (in Russian).

Sventek Yu. V. *Theoretical and Applied Aspects of Modern Cartography*. Moscow: Editorial URSS, 1999. 80 p. (in Russian).

Van Der Poorten P. M., Jones C. B. Characterisation and Generalisation of Cartographic Lines Using Delaunay Triangulation. *International Journal of Geographical Information Science*, 2002. V. 16. No. 8. P. 773–794. DOI: 10.1080/13658810210149434.

Visvalingham M., Whyatt J. Line Generalization by Repeated Elimination of Points. *Cartographic Journal*, 1993. V. 30. No. 1. P. 46–51. DOI: 10.1179/000870493786962263.

Voronoi G. F. New Applications of Continuous Parameters to the Theory of Quadratic Forms. *Journal for the Queen and Mathematics*, 1908. V. 134. P. 198–287 (in French). DOI: 10.1515/crl.1.1908.133.97/html.

Wang Z., Muller J. C. Complex Coastline Generalization. *Cartography and Geographic Information Systems*, 1993. V. 20. Iss. 2. P. 96–106. DOI: 10.1559/152304093782610333.

Wei Z., Liu Y., Cheng L., Ding S. A Progressive and Combined Building Simplification Approach with Local Structure Classification and Backtracking Strategy. *ISPRS International Journal of Geo-Information*, 2021. V. 10. Iss. 5. Art. 302. DOI: 10.3390/ijgi10050302.

Yakimova O. P., Murin D. M., Gorshkov V. G. Joint Simplification of Various Types of Spatial Objects While Preserving Topological Relations. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2024. V. 58. No. 7. P. 202–212. DOI: 10.3103/S0146411624700378.