

ing and Spatial Information Sciences, Vol. XL-7, Issue W3, 2015, pp. 643–649. Doi:10.5194/isprsarchives-XL-7-W3-643-2015.

13. W3C. WebRTC 1.0: Real-time Communication Between Browsers. W3C Working Draft, 13 March 2017. URL: <http://www.w3.org/TR/webrtc/>.

УДК 51-7+528.94+551.4

DOI: 10.24057/2414-9179-2017-2-23-130-143

И.В. Флоринский¹

О ГЕОМОРФОМЕТРИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ НА ПОВЕРХНОСТИ ТРЕХОСНОГО ЭЛЛИПСОИДА (ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ)

АННОТАЦИЯ

Геоморфометрическое моделирование широко используется при решении различных разномасштабных задач в науках о Земле и планетных исследованиях. Алгоритмический аппарат геоморфометрии может корректно применяться для работы с моделями рельефа, заданными на плоских квадратных сетках, а также на сетках сфероидических трапеций на поверхности эллипсоида вращения и сферы. При моделировании Земли, Марса, Луны, Венеры и Меркурия расчёты на сетках сфероидических трапеций тривиальны. Это связано с тем, что: а) форма указанных небесных тел описывается эллипсоидом вращения или сферой; и б) для этих поверхностей существуют хорошо разработанная теория и вычислительные алгоритмы решения главных геодезических задач и определения площади сфероидической трапеции. Вместе с тем, для описания формы малых спутников планет и астероидов во многих случаях целесообразно применять трехосный эллипсоид. Однако в геоморфометрии отсутствует алгоритмический аппарат, предназначенный для работы на такой поверхности. В статье формулируется задача геоморфометрического моделирования на поверхности трехосного эллипсоида. Показано, что, если цифровая модель высот небесного тела или его фрагмента задана на сетке сфероидических трапеций с использованием системы геодезических или планетоцентрических координат трехосного эллипсоида, то для расчёта моделей локальных морфометрических величин требуется: 1) перейти в систему эллиптических координат; и 2) способом Якоби определить линейные размеры элементов скользящего сфероидического трапецеидального окна. Подход к определению площадей сфероидических трапецеидальных ячеек при расчёте нелокальных морфометрических величин аналогичен. Требуется разработка соответствующего геоинформационного программного обеспечения.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:

геоморфометрия, цифровое моделирование рельефа, поверхность, трехосный эллипсоид, обратная геодезическая задача

ВВЕДЕНИЕ

Предметом геоморфометрии является количественное моделирование и анализ рельефа, а также взаимосвязей между рельефом и другими компонентами геосистем. Для описания свойств рельефа используются локальные, нелокальные и комбинированные морфометрические величины, в том числе: крутизна склона (G), горизонтальная кривизна (k_h), вертикальная кривизна (k_v), минимальная кривизна (k_{min}), максимальная кривизна (k_{max}), водосборная площадь (CA), топографический индекс (TI) и др. [Shary *et al.*, 2002; Florinsky, 2016]. Ме-

¹ Институт математических проблем биологии РАН – филиал Института прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН; 142290, Московская обл., Пушкино, ул. проф. Виткевича, 1; e-mail: iflor@mail.ru

тоды геоморфометрии широко используются при решении различных разномасштабных задач, в частности, при геоморфологическом и гидрологическом моделировании, прогнозном почвенном и геоботаническом картографировании, выявлении и анализе геологических структур, моделировании эволюции ландшафтов и пр. [Moore *et al.*, 1991; Wilson, Gallant, 2000; Shary *et al.*, 2002; Hengl, Reuter, 2009; Florinsky, 2016].

Существующий алгоритмический аппарат геоморфометрии может корректно применяться для работы с моделями, заданными на плоских квадратных сетках, а также на сетках сфероидических трапеций на поверхности эллипсоида вращения и сферы. Вместе с тем, для описания формы малых спутников планет и астероидов во многих случаях целесообразно применять трехосный эллипсоид [Duxbury, 1974, 1991; Soter, Harris, 1977; Thomas, 1989; Stooke, 1998; Drummond, Christou, 2008]. Кроме того, трехосный эллипсоид неоднократно использовался для описания формы Земли, Марса и Луны [De Schubert, 1859; Clarke, 1880, pp. 305-309; Шебуев, 1896; Красовский, 1902, 1936; Heiskanen, 1928, 1962; Загребин, 1948; Burša, Šíma, 1980; Íz *et al.*, 2011]. При этом в геоморфометрии отсутствует алгоритмический аппарат, предназначенный для работы на поверхности трехосного эллипсоида. Это затрудняет применение методов геоморфометрии при изучении малых спутников и астероидов.

В данной статье нами формулируется задача геоморфометрического моделирования на поверхности трёхосного эллипсоида.

МАТЕРИАЛЫ, МЕТОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ; ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Моделирование на сфере и эллипсоиде вращения

Модели морфометрических величин рассчитываются по цифровым моделям высоты (ЦМВ). Для создания ЦМВ обычно используют два типа регулярных сеток: плоские квадратные сетки и сетки сфероидических трапеций (рисунок 1). Сетки I типа применяются для ЦМВ относительно небольших участков, когда кривизной планеты можно пренебречь. Сетки II типа применяются для описания рельефа обширных территорий или всей планеты, когда её кривизной нельзя пренебрегать. Глобальные и квази-глобальные ЦМВ (SRTM1, ASTER GDEM, SRTM30_PLUS и др.) построены по сеткам II типа.

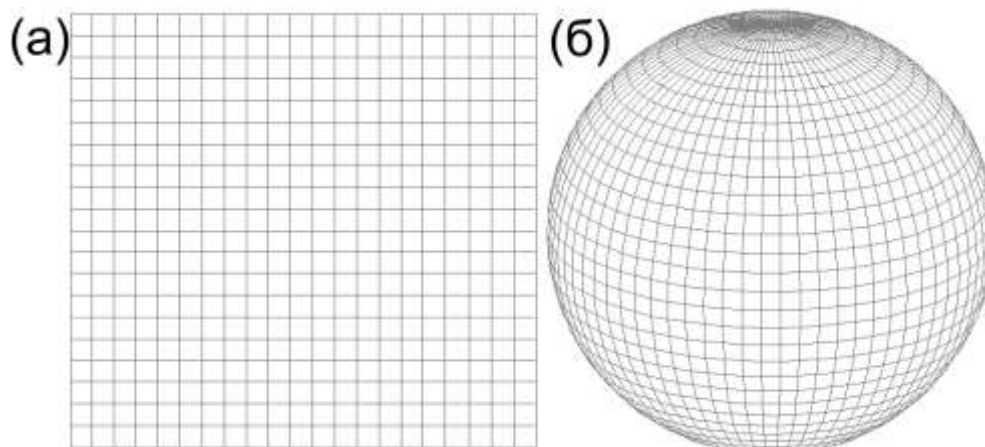


Рисунок 1. Регулярные сетки ЦМВ:

(а) плоская квадратная сетка; (б) сетка сфероидических трапеций [Florinsky, 2017].

Figure 1. DEM regular grids:

(a) plane square grid; (b) spheroidal equal angular grid [Florinsky, 2017].

Для плоских квадратных сеток существуют алгоритмы расчёта локальных морфометрических величин (напр., G , k_h , k_v , k_{min} , k_{max}), основанные на аппроксимации частных производных высоты конечными разностями [Evans, 1980; Zevenbergen, Thorne, 1987; Florinsky, 2009], а также методы расчёта нелокальных величин (напр., CA), основанные на алгоритмах

маршрутизации потоков [Martz, de Jong, 1988; Quinn *et al.*, 1991; Tarboton, 1997]. При вычислении комбинированных величин (напр., TI) последовательно применяются алгоритмы для нелокальных и локальных величин.

Методы, предназначенные для плоских квадратных сеток, не могут применяться на сетках сфероидических трапеций. Это связано с принципиальными геометрическими различиями (рисунок 1): шаг сетки сфероидических трапеций, измеренный в линейных единицах, зависит от широты.

Существует метод расчёта локальных морфометрических величин для сеток сфероидических трапеций [Florinsky, 1998, 2017]. Локальные величины являются функциями частных производных высоты r, t, s, p, q , например:

$$k_h = -\frac{q^2 r - 2pqs + p^2 t}{(p^2 + q^2)\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad (1)$$

где

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}. \quad (2)$$

Перемещая скользящее сфероидическое трапецеидальное окно 3×3 (рисунок 2а) вдоль ЦМВ, можно рассчитать значения r, t, s, p, q и, соответственно, локальных величин для всех точек матрицы ЦМВ (кроме крайних строк и столбцов). Если обрабатывается виртуально замкнутая глобальная сфероидическая ЦМВ, значения локальных величин рассчитываются для всех точек. Конечнo-разностные аппроксимации частных производных являются функциями линейных размеров элементов скользящего окна a, b, c, d, e (рисунок 2а):

$$r = \frac{c^2(z_1 + z_3 - 2z_2) + b^2(z_4 + z_6 - 2z_5) + a^2(z_7 + z_9 - 2z_8)}{a^4 + b^4 + c^4} \quad (3)$$

$$s = \frac{c[a^2(d+e) + b^2e](z_3 - z_1) - b(a^2d - c^2e)(z_4 - z_6) + a[c^2(d+e) + b^2d](z_7 - z_9)}{2[a^2c^2(d+e)^2 + b^2(a^2d^2 + c^2e^2)]} \quad (4)$$

$$p = \frac{a^2cd(d+e)(z_3 - z_1) + b(a^2d^2 + c^2e^2)(z_6 - z_4) + ac^2e(d+e)(z_9 - z_7)}{2[a^2c^2(d+e)^2 + b^2(a^2d^2 + c^2e^2)]}, \quad (5)$$

где z_1, \dots, z_9 – значения высоты в узлах скользящего окна. Формулы для t и q громоздки и могут быть найдены в других работах автора [Florinsky, 1998, 2016].

Значения a, b, c, d, e зависят от широты (рисунок 2а). Так как геодезические координаты каждой точки известны, то определение a, b, c, d, e является решением обратной геодезической задачи при малых расстояниях.

Для расчёта нелокальных морфометрических величин существует подход, адаптирующий алгоритмы маршрутизации потоков к сфероидической трапецеидальной геометрии [Florinsky, 2017]. При этом, основным параметром является площадь Π ячейки ЦМВ: значение CA в данной ячейке равно суммарной площади ячеек, через которые прошли линии тока, пришедшие в данную ячейку (рисунок 2б). Значения Π зависят от широты, а их определение соответствует вычислению площади сфероидической трапеции.

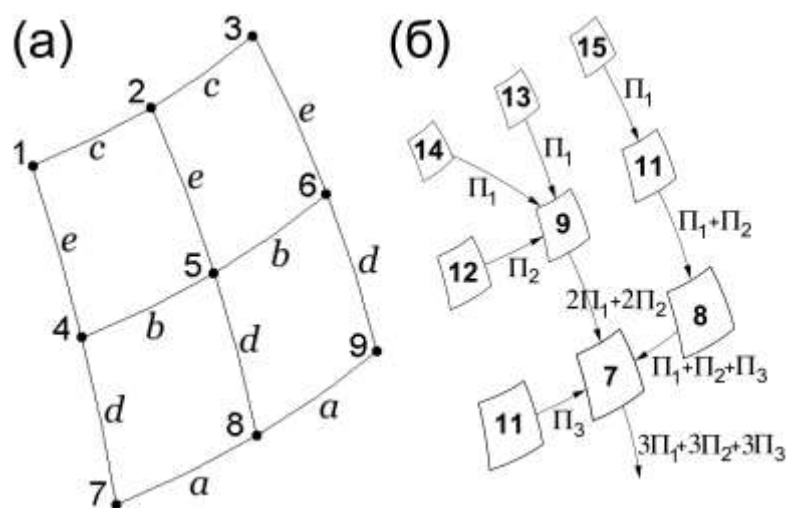


Рисунок 2. Схемы расчёта морфометрических величин:

(а) скользящее сфероидическое трапецидальное окно для расчёта локальных величин a, b, c, d, e – линейные размеры элементов окна; 1, ..., 9 – номера точек

(б) схема алгоритма маршрутизации потоков

Цифры – значения высоты; $\Pi_1, \dots, 3$ – площади ячеек на различных широтах; стрелки – направления потоков [Florinsky, 2017]

Figure 2. Schemes for calculation of morphometric variables:

(а) a spheroidal trapezoidal moving window used to calculate local variables

a, b, c, d, e are linear sizes of window elements; 1, ..., 9 are node numbers

(б) a scheme for a flow routing algorithm

Digits are elevation values; $\Pi_1, \dots, 3$ are cell areas at different latitudes; arrows show flow directions [Florinsky, 2017]

При геоморфометрическом моделировании Земли, Марса, Луны, Венеры и Меркурия расчёты на сетках сфероидических трапеций тривиальны [Florinsky, 2008a, 2008b, 2016, 2017; Florinsky, Filippov, 2017; Florinsky et al., 2017]. Это связано с тем, что форма указанных небесных тел описывается эллипсоидом вращения (Земля и Марс) или сферой (Луна, Венера и Меркурий). Для этих поверхностей существуют хорошо разработанная теория и вычислительная практика решения прямой и обратной геодезических задач [Bessel, 1825; Gauss, 1843, 1846; Helmert, 1880; Jordan, 1883; Урмаев, 1955; Морозов, 1958, 1979; Багратуни, 1962; Sodano, 1965; Ганьшин, 1967; Kivioja, 1971; Vincenty, 1975; Беспалов, 1980; Sjöberg, 2006b; Karney, 2013; Panou, 2013], а также определения площади сфероидической трапеции [Helmert, 1880; Урмаев, 1955; Багратуни, 1962; Морозов, 1979; Sjöberg, 2006a].

Моделирование на трёхосном эллипсоиде

Геометрия трёхосного эллипсоида существенно отличается от геометрии эллипсоида вращения (и, тем более, сферы) (рисунок 3). В частности, на трёхосном эллипсоиде шаг сетки сфероидических трапеций, измеренный в линейных единицах, зависит не только от широты (как на сфере и эллипсоиде вращения), но и от долготы [Красовский, 1902]. Поэтому очевидно, что при расчётах на поверхности трёхосного эллипсоида нельзя применять методы и алгоритмы, предназначенные для эллипсоида вращения или сферы.

Различные разделы теории трёхосного эллипсоида исследованы с различной степенью глубины. В теории устойчивости трёхосный эллипсоид изучается как одна из фигур равновесия [Ляпунов, 1948; Загребин, 1948; Chandrasekhar, 1969]. В геодезической литературе неоднократно рассматривались системы координат трёхосного эллипсоида и связи между ними [Шебуев, 1896; Беспалов, 1980; Бугаевский, 1999; Feltens, 2009; Ligas, 2012a, 2012b; Огородова и др., 2012; Bektaş, 2015; Panou et al., 2016]. Значительный прогресс достигнут в разработке картографических проекций для трёхосного эллипсоида [Snyder, 1985; Stooke, Keller,

1990; Бугаевский, 1991, 1999; Grafarend *et al.*, 2014]. Вместе с тем, хотя существует аналитическая основа для решения главных геодезических задач на поверхности трёхосного эллипсоида [Jacobi, 1839; Шебуев, 1898; Красовский, 1902, 1936; Беспалов, 1980; Karney, 2012; Panou, 2013], в вычислительном плане этот вопрос проработан ещё явно недостаточно [Bailard, 2013].

Глобальные ЦМВ планет и крупных спутников, заданные на сетках сфероидических трапеций, обычно представлены в геодезических координатах, а ЦМВ малых небесных тел – в планетоцентрических координатах.

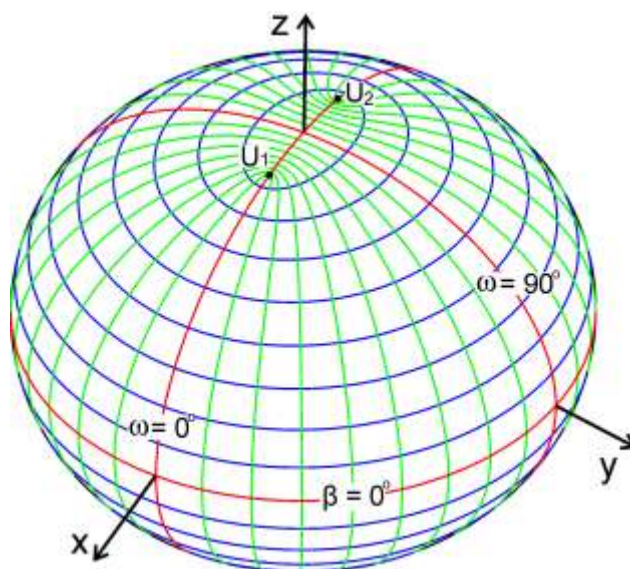


Рисунок 3. Трёхосный эллипсоид:

линии эллиптических координат β (синие) и ω (зелёные); главные сечения (красные);
омбилические точки (U₁, U₂)
[Panou, 2013]

Figure 3. A triaxial ellipsoid:

lines of elliptical coordinates β (blue) and ω (green); principal sections (red); umbilical points (U₁ and U₂)
[Panou, 2013]

В декартовых координатах x , y , z уравнение трёхосного эллипсоида (рисунок 3) имеет вид:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1, \quad (6)$$

где A и B – большая и малая экваториальные, C – полярная полуоси; $A > B > C$.

Геодезическая система координат трёхосного эллипсоида определяется неоднозначно [Clarke, 1880; Беспалов, 1980]. Мы используем следующие определения [Feltens, 2009]: геодезическая широта (φ) – угол между нормалью к поверхности эллипсоида и экваториальной плоскостью XY (рисунок 3); геодезическая долгота (λ) – угол, измеряемый в плоскости XY , между линией, параллельной оси X и проекцией нормали к поверхности эллипсоида на плоскость XY . Декартовы и геодезические координаты связаны следующим образом [Feltens, 2009]:

$$\begin{aligned}
 x &= v \cos \varphi \cos \lambda \\
 y &= v(1 - e_e^2) \cos \varphi \sin \lambda, \\
 z &= v(1 - e_x^2) \sin \varphi
 \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$v = \frac{A}{\sqrt{1 - e_x^2 \sin^2 \varphi - e_e^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda}}, \tag{8}$$

e_x и e_e – первые полярный и экваториальный эксцентриситеты:

$$e_x = \frac{\sqrt{A^2 - C^2}}{A}, \quad e_e = \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{A} \tag{9}$$

Обратная связь между геодезическими и декартовыми координатами имеет вид [Feltens, 2009]:

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \arctg \left(\frac{(1 - e_e^2)}{(1 - e_x^2)} \frac{z}{\sqrt{((1 - e_e^2)^2 x^2 + y^2)}} \right) \\
 \lambda &= \arctg \left(\frac{1}{(1 - e_e^2)} \frac{y}{x} \right)
 \end{aligned} \tag{10}$$

Декартовы и планетоцентрические координаты (широта Θ и долгота Λ) связаны следующим образом [Беспалов, 1980]:

$$\begin{aligned}
 x &= \rho \cos \Theta \cos \Lambda \\
 y &= \rho \cos \Theta \sin \Lambda, \\
 z &= \rho \sin \Theta
 \end{aligned} \tag{11},$$

где

$$\rho = \left[\left(\frac{\cos \Theta \cos \Lambda}{A} \right)^2 + \left(\frac{\cos \Theta \sin \Lambda}{B} \right)^2 + \left(\frac{\sin \Theta}{C} \right)^2 \right]^{-1/2} \tag{12}.$$

Главные геодезические задачи на поверхности трёхосного эллипсоида могут решаться в системе эллиптических координат (рисунок 3). Следующие формулы описывают связь декартовых координат с эллиптическими широтой (β) и долготой (ω) [Jacobi, 1839; Karney, 2012]:

$$\begin{aligned}
 x &= A \cos \omega \sqrt{\frac{A^2 - B^2 \sin^2 \beta - C^2 \cos^2 \beta}{A^2 - C^2}} \\
 y &= B \cos \beta \sin \omega, \\
 z &= C \sin \beta \sqrt{\frac{A^2 \sin^2 \omega + B^2 \cos^2 \omega - C^2}{A^2 - C^2}}
 \end{aligned} \tag{13}$$

Для вычисления эллиптических координат по известным декартовым и геодезическим могут применяться следующие итерационные формулы [Векташ, 2015]:

$$\begin{aligned} \omega_{i+1} &= \operatorname{arctg} \left(\frac{Ay \sqrt{(p^2 - 1) \sin^2 \beta_i + 1}}{Bx \cos \beta_i} \right), \\ \beta_{i+1} &= \operatorname{arctg} \left(\frac{Bz \sin \omega_i}{Cy \sqrt{1 - p^2 \cos^2 \omega_i}} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

где $i = 0, 1, 2, \dots$; $\beta_0 = \varphi$, $\omega_0 = \lambda$;

$$p = \sqrt{\frac{A^2 - B^2}{A^2 - C^2}}. \quad (15)$$

Расстояние S между двумя точками $P_1(\beta_1, \omega_1)$ и $P_2(\beta_2, \omega_2)$ на поверхности трёхосного эллипсоида может быть определено способом Якоби [Jacobi, 1839] по формуле [Карнеу, 2012]:

$$\begin{aligned} dS &= \frac{\sqrt{B^2 \sin^2 \beta + C^2 \cos^2 \beta} \sqrt{(B^2 - C^2) \cos^2 \beta - \gamma}}{\sqrt{A^2 - B^2 \sin^2 \beta - C^2 \cos^2 \beta}} d\beta = \\ &= \frac{\sqrt{A^2 \sin^2 \omega + B^2 \cos^2 \omega} \sqrt{(A^2 - B^2) \sin^2 \omega + \gamma}}{\sqrt{A^2 \sin^2 \omega + B^2 \cos^2 \omega - C^2}} d\omega, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\gamma = (B^2 - C^2) \cos^2 \beta \sin^2 \alpha - (A^2 - B^2) \sin^2 \omega \cos^2 \alpha, \quad (17)$$

где α – угол между геодезической от $P_1(\beta_1, \omega_1)$ до $P_2(\beta_2, \omega_2)$ и линией $\omega = \text{const}$.

ВЫВОДЫ

Если ЦМВ небесного тела или его фрагмента задана на сетке сфероидических трапеций в системе геодезических или планетоцентрических координат трёхосного эллипсоида, то для вычисления по этой ЦМВ частных производных высоты и моделей локальных морфометрических величин требуется: 1) используя формулы (7, 14) или (11, 10, 14), перейти в систему эллиптических координат; и 2) способом Якоби по формуле (16) определить линейные размеры элементов скользящего сфероидического трапецеидального окна (рисунок 2а). Подход к определению площадей сфероидических трапецеидальных ячеек при расчёте нелокальных морфометрических величин (рисунок 2б) в целом аналогичен.

Насколько нам известно, вычислительный алгоритм для решения обратной геодезической задачи способом Якоби реализован лишь для калькулятора HP-41 [Baillard, 2013]. Таким образом, требуется разработка алгоритма и программного кода, которые позволят про-

водить геоморфометрическое моделирование на поверхности трёхосного эллипсоида в рамках специализированного программного обеспечения (напр., LandLord [Florinsky, 2016]) или ГИС с открытым исходным кодом (например, QGIS). Данные вопросы будут рассмотрены нами в последующих публикациях.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 15-07-02484.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Багратуни Г.В. Курс сфероидической геодезии. – М.: Геодезиздат, 1962. – 252 с.
2. Беспалов Н.А. Методы решения задач сфероидической геодезии. – М.: Недра, 1980. – 287 с.
3. Бугаевский Л.М. Изометрические координаты, равноугольные цилиндрическая, коническая и азимутальная проекции трёхосного эллипсоида // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1991, № 3. – С. 144–152.
4. Бугаевский Л.М. Теория картографических проекций регулярных поверхностей. – М.: Златоуст, 1999. – 144 с.
5. Ганьшин В.Н. Геометрия земного эллипсоида. – М.: Недра, 1967. – 115 с.
6. Загребин Д.В. Уровненный трехосный эллипсоид и сила тяжести на его поверхности. – М.: Изд-во АН СССР, 1948. – 112 с.
7. Красовский Ф.Н. Определение размеров земного трёхосного эллипсоида из результатов русских градусных измерений // Памятная книжка Константиновского межевого института за 1900-1901 год. – М.: Русское товарищество печатного и издательского дела, 1902. – С. 19–54.
8. Красовский Ф.Н. Обзор и результаты современных градусных измерений // Геодезист, 1936. – № 6, С. 3–26. – № 7, С. 1–19. – № 10, С. 18–31. – № 11, С. 30–45. – № 12, С. 5–23.
9. Ляпунов А.М. Избранные труды. – М.: Изд-во АН СССР, 1948. – 540 с.
10. Морозов В.П. Методы решения геодезических задач на поверхности земного эллипсоида. – М.: ВИА, 1958. – 112 с.
11. Морозов В.П. Курс сфероидической геодезии. – 2-е изд. – М.: Недра, 1979. – 296 с.
12. Огородова Л.В., Конопихин А.А., Надеждина И.Е. Вычисление геодезических координат для трёхосного отсчетного эллипсоида // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 2012, № 5. – С. 9–13.
13. Урмаев Н.А. Сфероидическая геодезия. – М.: РИО ВТС, 1955. – 168 с.
14. Шебуев Г.Н. Геометрические основания геодезии на трёхосном эллипсоиде, весьма мало отличающемся от сфероида // Труды топографо-геодезической комиссии, 1896, Вып. 5. – С. 70–97.
15. Шебуев Г.Н. Расстояния, азимуты и треугольники на трёхосном эллипсоиде, мало отличающемся от сферы // Труды топографо-геодезической комиссии, 1898, Вып. 8. – С. 1–72.
16. Baillard J.-M. Geodesics on a triaxial ellipsoid for the HP-41 // HP41Programs, 2013, <http://hp41programs.yolasite.com/geod3axial.php>.
17. Bektaş S. Geodetic computations on triaxial ellipsoid // International Journal of Mining Science, 2015. – Vol. 1, № 1. – Pp. 25–34.
18. Bessel F.W. Über die Berechnung der geographischen Längen und Breiten aus geodätischen Vermessungen // Astronomische Nachrichten, 1825. – Vol. 4, № 86. – Pp. 241–254.
19. Burša M., Šima Z. Triaxiality of the Earth, the Moon and Mars // Studia Geophysica et Geodaetica, 1980. – Vol. 24, № 3. – Pp. 211–217.
20. Chandrasekhar S. Ellipsoidal Figures of Equilibrium. – New Haven: Yale University Press, 1969. – 253 p.

21. *Clarke A.R.* Geodesy. Oxford: Clarendon Press, 1880. – 356 p.
22. *De Schubert T.F.* Essai d'une détermination de la véritable figure de la terre // Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg. – Sér. VII, 1859. – Vol. 1, No. 6. – pp. 1–32.
23. *Drummond J., Christou J.* Triaxial ellipsoid dimensions and rotational poles of seven asteroids from Lick Observatory adaptive optics images, and of Ceres // *Icarus*, 2008. – Vol. 197, № 2. – Pp. 480–496.
24. *Duxbury T.C.* Phobos: Control network analysis // *Icarus*, 1974. – Vol. 23, № 2. – Pp. 290–299.
25. *Duxbury T.C.* An analytic model for the Phobos surface // *Planetary and Space Science*, 1991. – Vol. 39, № 1–2. – Pp. 355–376.
26. *Evans I.S.* An integrated system of terrain analysis and slope mapping // *Zeitschrift für Geomorphologie*, 1980. – Suppl. 36. – Pp. 274–295.
27. *Feltens J.* Vector method to compute the Cartesian (X, Y, Z) to geodetic (φ , λ , h) transformation on a triaxial ellipsoid // *Journal of Geodesy*, 2009. – Vol. 83, № 2. – Pp. 129–137.
28. *Florinsky I.V.* Derivation of topographic variables from a digital elevation model given by a spheroidal trapezoidal grid // *International Journal of Geographical Information Science*, 1998. – Vol. 12, № 8. – Pp. 829–852.
29. *Florinsky I.V.* Global lineaments: Application of digital terrain modelling // *Advances in Digital Terrain Analysis*. – Berlin: Springer, 2008a. – Pp. 365–382.
30. *Florinsky I.V.* Global morphometric maps of Mars, Venus, and the Moon // *Geospatial Vision*. – Berlin: Springer, 2008b. – Pp. 171–192.
31. *Florinsky I.V.* Computation of the third-order partial derivatives from a digital elevation model // *International Journal of Geographical Information Science*, 2009. – Vol. 23. – № 2. – P. 213–231.
32. *Florinsky I.V.* *Digital Terrain Analysis in Soil Science and Geology*. – 2nd ed. – Amsterdam: Academic Press, 2016. – 486 p.
33. *Florinsky I.V.* Spheroidal equal angular DEMs: The specificity of morphometric treatment // *Transactions in GIS*, 2017. – V. 21. Doi:10.1111/tgis.12269.
34. *Florinsky I.V., Filippov S.V.* A desktop system of virtual morphometric globes for Mars and the Moon // *Planetary and Space Science*, 2017. – Vol. 137. – Pp. 32–39.
35. *Florinsky I., Garov A., Karachevtseva I.* A web-system of virtual morphometric globes // *Geophysical Research Abstracts*, 2017. – Vol. 19, EGU2017-99.
36. *Gauss C.F.* Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie. Erste abhandlung // *Abhandlungen der Mathematischen Classe der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1843. – Vol. 2. – Pp. 3–45.
37. *Gauss C.F.* Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie. Zweite abhandlung // *Abhandlungen der Mathematischen Classe der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1846. – Vol. 3. – Pp. 3–43.
38. *Grafarend E.W., You R.-J., Syffus R.* *Map Projections: Cartographic Information Systems*. – 2nd ed. – Berlin: Springer, 2014. – 935 p.
39. *Heiskanen W.* Ist die Erde ein dreiaxsiges Ellipsoid? // *Astronomische Nachrichten*, 1928. – Vol. 232, No. 5562. – pp. 305–308.
40. *Heiskanen W.A.* Is the Earth a triaxial ellipsoid? // *Journal of Geophysical Research*, 1962. – Vol. 67, № 1. – Pp. 321–327.
41. *Helmert F.R.* *Die mathematischen und physikalischen Theorieen der höheren Geodäsie*. – Vol. 1: Die mathematischen Theorieen. – Leipzig: Teubner, 1880. – 631 p.
42. *Hengl T., Reuter H.I.* (Eds.), *Geomorphometry: Concepts, Software, Applications*. – Amsterdam: Elsevier, 2009. – 796 p.
43. *Íz H.B., Ding X.L., Dai C.L., Shum C.K.* Polyaxial figures of the Moon // *Journal of Geodetic Science*, 2011. – Vol. 1, № 4, – Pp. 348–354.

44. *Jacobi C.G.J.* Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid und den verschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen analytischen Substitution // *Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1839. – № 19. – Pp. 309–313.
45. *Jordan W.* Neue Auflösung der geodätischen Hauptaufgabe und ihrer Umkehrung // *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 1883. – Vol. 12, № 3. – Pp. 65–82.
46. *Karney C.F.F.* Geodesics on a triaxial ellipsoid // *GeographicLib* 1.47, 2012. – <http://geographiclib.sourceforge.net/html/triaxial.html>.
47. *Karney C.F.F.* Algorithms for geodesics // *Journal of Geodesy*, 2013. – Vol. 87, № 1. – Pp. 43–55.
48. *Kivioja L.A.* Computation of geodetic direct and indirect problems by computers accumulating increments from geodetic line elements // *Bulletin Géoésique*, 1971. – Vol. 99, № 1. – Pp. 55–63.
49. *Ligas M.* Cartesian to geodetic coordinates conversion on a triaxial ellipsoid // *Journal of Geodesy*, 2012a. – Vol. 86, № 4. – Pp. 249–256.
50. *Ligas M.* Two modified algorithms to transform Cartesian to geodetic coordinates on a triaxial ellipsoid // *Studia Geophysica et Geodaetica*, 2012b. – Vol. 56, № 4. – Pp. 993–1006.
51. *Martz L.W., de Jong E.* CATCH: A Fortran program for measuring catchment area from digital elevation models // *Computers and Geosciences*, 1988. – Vol. 14, № 5. – Pp. 627–640.
52. *Moore I.D., Grayson R.B., Ladson A.R.* Digital terrain modelling: A review of hydrological, geomorphological and biological applications // *Hydrological Processes*, 1991. – Vol. 5. – № 1. – Pp. 3–30.
53. *Panou G.* The geodesic boundary value problem and its solution on a triaxial ellipsoid // *Journal of Geodetic Science*, 2013. – Vol. 3, № 3. – Pp. 240–249.
54. *Panou G., Delikaraoglou D., Korakitis R.* Solving the geodesics on the ellipsoid as a boundary value problem // *Journal of Geodetic Science*, 2013. – Vol. 3, № 1. – Pp. 40–47.
55. *Panou G., Korakitis R., Delikaraoglou D.* Triaxial coordinate systems and their geometrical interpretation // *Measuring and Mapping the Earth: Dedicated volume in honor of Professor Emeritus C. Kaltsikis*. – Thessaloniki: Ziti, 2016. – Pp. 126–135.
56. *Quinn P.F., Beven K.J., Chevallier P., Planchon O.* The prediction of hillslope flowpaths for distributed modelling using digital terrain models // *Hydrological Processes*, 1991. – Vol. 5, № 1. – Pp. 59–80.
57. *Shary P.A., Sharaya L.S., Mitusov A.V.* Fundamental quantitative methods of land surface analysis // *Geoderma*, 2002. – Vol. 107, № 1–2. – Pp. 1–32.
58. *Sjöberg L.E.* Determination of areas on the plane, sphere and ellipsoid // *Survey Review*, 2006a. – Vol. 38, № 301. – Pp. 583–593.
59. *Sjöberg L.E.* New solutions to the direct and indirect geodetic problems on the ellipsoid // *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 2006b. – Vol. 131. – Pp. 35–39.
60. *Snyder J.P.* Conformal mapping of the triaxial ellipsoid // *Survey Review*, 1985. – Vol. 28, № 217. – Pp. 130–148.
61. *Sodano E.M.* General non-iterative solution of the inverse and direct geodetic problems // *Bulletin Géoésique*, 1965. – Vol. 75, № 1. – Pp. 69–89.
62. *Soter S., Harris A.* The equilibrium figures of Phobos and other small bodies // *Icarus*, 1977. – Vol. 30, № 1. – Pp. 192–199.
63. *Stooke P.J.* Mapping worlds with irregular shapes // *Canadian Geographer*, 1998. – Vol. 42, № 1. – Pp. 61–78.
64. *Stooke P.J., Keller C.P.* Map projections for non-spherical worlds: The variable-radius map projections // *Cartographica*, 1990. – Vol. 27, № 2. – Pp. 82–100.
65. *Tarboton D.G.* A new method for the determination of flow directions and upslope areas in grid digital elevation models // *Water Resources Research*, 1997. – Vol. 33. – № 2. – Pp. 309–319.

66. *Thomas P.C.* The shapes of small satellites // *Icarus*, 1989. – Vol. 77, № 2. – Pp. 248–274.
67. *Vincenty T.* Direct and inverse solutions of geodesics on the ellipsoid with application of nested equations // *Survey Review*, 1975. – Vol. 23, № 176. – Pp. 88–93.
68. *Wilson J.P., Gallant J.C.* (Eds.). *Terrain Analysis: Principles and Applications*. – New York: Wiley, 2000. – 479 p.
69. *Zevenbergen L.W., Thorne C.R.* Quantitative analysis of land surface topography // *Earth Surface Processes and Landforms*, 1987. – Vol. 12, № 1. – Pp. 47–56.

Igor V. Florinsky¹

TOWARD GEOMORPHOMETRIC MODELING ON A SURFACE OF A TRIAXIAL ELLIPSOID (FORMULATION OF THE PROBLEM)

ABSTRACT

Geomorphometric modeling is widely used to study multiscale problems of the Earth and planetary sciences. Existing algorithms of geomorphometry can be applied to terrain models given by plane square grids or spheroidal equal angular grids on a surface of an ellipsoid of revolution or a sphere. Computations on spheroidal equal angular grids are trivial for modeling the Earth, Mars, the Moon, Venus, and Mercury. This is because: (a) forms of the abovementioned celestial bodies can be described by an ellipsoid of revolution or a sphere; and (b) for these surfaces, this is well-developed theory and computational algorithms for solving direct and inverse geodetic problems, as well as for determining spheroidal trapezium areas. It is advisable to apply a triaxial ellipsoid for describing forms of small moons and asteroids. However, there are no geomorphometric algorithms intended for such a surface. In this paper, we have formulated the problem of geomorphometric modeling on a surface of a triaxial ellipsoid. Let a digital elevation model of a celestial body or its portion be given by a spheroidal equal angular grid using geodetic or planetocentric coordinate systems of a triaxial ellipsoid. To derive models of local morphometric variables, one should: (1) turn to the elliptical coordinate system, and (2) determine linear sizes of spheroidal trapezoidal moving window elements by the Jacobi solution. To derive models of nonlocal morphometric variables, one may determine areas of spheroidal trapezoidal cells by similar way. Related GIS software should be developed.

KEYWORDS:

geomorphometry, digital terrain modeling, surface, triaxial ellipsoid, inverse geodetic problem

REFERENCES

1. Bagratuni G.V. Kurs sferoidicheskoy geodezii [Course in spheroidal geodesy]. Moscow: Geodezizdat, 1962, 252 p. (in Russian).
2. Bepalov N.A. Metody resheniya zadach sferoidicheskoy geodezii [Methods for solving problems of spheroidal geodesy]. Moscow: Nedra, 1980, 287 p. (in Russian).
3. Bugaevsky L.M. Izometricheskie koordinaty, ravnougol'nye tsilindricheskaya, konicheskaya i azimutal'naya proektsii trekhosnogo ellipsoida [Isometric coordinates, equiangular cylindrical, conical, and azimuthal projections of a triaxial ellipsoid]. *Izvestia Vuzov. Geodeziya i Aerofotos'yomka*, 1991, No. 3, pp. 144–152 (in Russian).
4. Bugaevsky L.M. Teoriya kartograficheskikh proektsij regul'yarnykh poverhnostej [Theory of

¹ Institute of Mathematical Problems of Biology, the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences; prof. Vitkevich st, 1, Pushchino, Moscow Region, 142290, Russia; *e-mail*: iflor@mail.ru

- cartographic projections of regular surfaces]. Moscow: Zlatoust, 1999, 144 p. (in Russian).
5. Ganshin V.N. Geometriya zemnogo ellipsoida [Geometry of the Earth ellipsoid]. Moscow: Nedra, 1967, 115 p. (in Russian).
 6. Zagrebin D.V. Urovennyj trekhosnyj ellipsoid i sila tyazhesti na ego poverkhnosti [A level triaxial ellipsoid and gravity on its surface]. Moscow: Izdatel'stvo AN SSSR, 1948, 112 p. (in Russian).
 7. Krasovsky F.N. Opredelenie razmerov zemnogo trekhosnogo ellipsoida iz rezul'tatov russkikh gradusnykh izmerenij [Determination of the size of the Earth triaxial ellipsoid from the results of the Russian arc measurements]. Pamyatnaya knizhka Konstantinovskogo mezhevogo instituta za 1900-1901 god. Moscow: Russkoe tovarishchestvo pechatnogo i izdatel'skogo dela, 1902, pp. 19–54 (in Russian).
 8. Krasovsky F.N. Obzor i rezul'taty sovremennykh gradusnykh izmerenij [Review and results of modern arc measurements]. Geodesist, 1936, No. 6, pp. 3–26; No. 7, pp. 1–19; No. 10, pp. 18–31; No. 11, pp. 30–45; No. 12, pp. 5–23 (in Russian).
 9. Liapounoff A.M. Izbrannye trudy [Selected works]. Moscow: Izdatel'stvo AN SSSR, 1948, 540 p. (in Russian).
 10. Morozov V.P. Metody resheniya geodezicheskikh zadach na poverkhnosti zemnogo ellipsoida [Methods for solving geodesic problems on the surface of the Earth ellipsoid]. Moscow: Voenno-Inzhenernaya Akademiya, 1958, 112 p. (in Russian).
 11. Morozov V.P. Kurs sferoidicheskoy geodezii. 2 izd. [A course in spheroidal geodesy. 2nd enl. and rev. ed.]. Moscow: Nedra, 1979, 296 p. (in Russian).
 12. Ogorodova L.V., Konopikhin A.A., Nadezhdina I.E. Vychislenie geodezicheskikh koordinat dlya trekhosnogo otschetnogo ellipsoida [Calculating geodetic coordinates on triaxial reference ellipsoid]. Izvestia Vuzov. Geodeziya i Aerofotos'yomka, 2012, No. 5, pp. 9–13 (in Russian, with English abstract).
 13. Urmaev N.A. Sferoidicheskaya geodeziya [Spheroidal geodesy]. Moscow: RIO VTS, 1955, 168 p. (in Russian).
 14. Shebuev G.N. Geometricheskie osnovaniya geodezii na trekhosnom ellipsoide, ves'ma malo otlichayushchemsya ot sferoida [Geometric bases of geodesy on a triaxial ellipsoid, very little different from a spheroid]. Trudy Topografo-Geodezicheskoy Komissii, 1896, Vol. 5, pp. 70–97 (in Russian).
 15. Shebuev G.N. Rasstoyaniya, azimuty i treugol'niki na trekhosnom ellipsoide, malo otlichayushchemsya ot sfery [Distances, azimuths, and triangles on a triaxial ellipsoid, little different from a sphere]. Trudy Topografo-Geodezicheskoy Komissii, 1898, Vol. 8, pp. 1–72 (in Russian).
 16. Baillard J.-M. Geodesics on a triaxial ellipsoid for the HP-41. HP41Programs, 2013, <http://hp41programs.yolasite.com/geod3axial.php>.
 17. Bektaş S. Geodetic computations on triaxial ellipsoid. International Journal of Mining Science, 2015, Vol. 1, No. 1, pp. 25–34.
 18. Bessel F.W. Über die Berechnung der geographischen Längen und Breiten aus geodätischen Vermessungen. Astronomische Nachrichten, 1825, Vol. 4, No. 86, pp. 241–254 (in German).
 19. Burša M., Šíma Z. Triaxiality of the Earth, the Moon and Mars. Studia Geophysica et Geodaetica, 1980, Vol. 24, No. 3, pp. 211–217.
 20. Chandrasekhar S. Ellipsoidal Figures of Equilibrium. New Haven, Yale University Press, 1969, 253 p.
 21. Clarke A.R. Geodesy. Oxford, Clarendon Press, 1880, 356 p.
 22. De Schubert T.F. Essai d'une détermination de la véritable figure de la terre. Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Petersbourg, Sér. VII, 1859, Vol. 1, No. 6, pp. 1–32 (in French).
 23. Drummond J., Christou J. Triaxial ellipsoid dimensions and rotational poles of seven aster-

- oids from Lick Observatory adaptive optics images, and of Ceres. *Icarus*, 2008, Vol. 197, No. 2, pp. 480–496.
24. Duxbury T.C. Phobos: Control network analysis. *Icarus*, 1974, Vol. 23, No. 2, pp. 290–299.
 25. Duxbury T.C. An analytic model for the Phobos surface. *Planetary and Space Science*, 1991, Vol. 39, No. 1–2, pp. 355–376.
 26. Evans I.S. An integrated system of terrain analysis and slope mapping. *Zeitschrift für Geomorphologie*, 1980, Suppl. 36, pp. 274–295.
 27. Feltens J. Vector method to compute the Cartesian (X, Y, Z) to geodetic (φ , λ , h) transformation on a triaxial ellipsoid. *Journal of Geodesy*, 2009, Vol. 83, No. 2, pp. 129–137.
 28. Florinsky I.V. Derivation of topographic variables from a digital elevation model given by a spheroidal trapezoidal grid. *International Journal of Geographical Information Science*, 1998, Vol. 12, No. 8, pp. 829–852.
 29. Florinsky I.V. Global lineaments: Application of digital terrain modelling. *Advances in Digital Terrain Analysis*. Berlin, Springer, 2008a, pp. 365–382.
 30. Florinsky I.V. Global morphometric maps of Mars, Venus, and the Moon. *Geospatial Vision: New Dimensions in Cartography*. Berlin, Springer, 2008b, pp. 171–192.
 31. Florinsky I.V. Computation of the third-order partial derivatives from a digital elevation model. *International Journal of Geographical Information Science*, 2009, Vol. 23, No. 2, pp. 213–231.
 32. Florinsky I.V. *Digital Terrain Analysis in Soil Science and Geology*. 2nd ed. Amsterdam, Academic Press, 2016, 486 p.
 33. Florinsky I.V. Spheroidal equal angular DEMs: The specificity of morphometric treatment. *Transactions in GIS*, 2017, Vol. 21; doi: 10.1111/tgis.12269.
 34. Florinsky I.V., Filippov S.V. A desktop system of virtual morphometric globes for Mars and the Moon. *Planetary and Space Science*, 2017, Vol. 137, pp. 32–39.
 35. Florinsky I., Garov A., Karachevtseva I. A web-system of virtual morphometric globes. *Geophysical Research Abstracts*, 2017, Vol. 19, EGU2017-99.
 36. Gauss C.F. Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie. Erste abhandlung. *Abhandlungen der Mathematischen Classe der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1843, Vol. 2, pp. 3–45 (in German).
 37. Gauss C.F. Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie. Zweite abhandlung. *Abhandlungen der Mathematischen Classe der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1846, Vol. 3, pp. 3–43 (in German).
 38. Grafarend E.W., You R.-J., Syffus R. *Map Projections: Cartographic Information Systems*. 2nd ed. Berlin, Springer, 2014, 935 p.
 39. Heiskanen W. Ist die Erde ein dreiaxsiges Ellipsoid? *Astronomische Nachrichten*, 1928, Vol. 232, No. 5562, pp. 305–308 (in German).
 40. Heiskanen W.A. Is the Earth a triaxial ellipsoid? *Journal of Geophysical Research*, 1962, Vol. 67, No. 1, pp. 321–327.
 41. Helmert F.R. *Die mathematischen und physikalischen Theorieen der höheren Geodäsie*. Vol. 1: Die mathematischen Theorieen, Leipzig, Teubner, 1880, 631 p (in German).
 42. Hengl T., Reuter H.I. (Eds.), *Geomorphometry: Concepts, Software, Applications*. Amsterdam, Elsevier, 2009, 796 p.
 43. İz H.B., Ding X.L., Dai C.L., Shum C.K. Polyaxial figures of the Moon. *Journal of Geodetic Science*, 2011, Vol. 1, No 4, pp. 348–354.
 44. Jacobi C.G.J. Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid und den verschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen analytischen Substitution. *Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1839, No 19, pp. 309–313 (in German).
 45. Jordan W. Neue Auflösung der geodätischen Hauptaufgabe und ihrer Umkehrung. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 1883, Vol. 12, No 3, pp. 65–82 (in German).
 46. Karney C.F.F. Geodesics on a triaxial ellipsoid. *GeographicLib* 1.47, 2012,

- <http://geographiclib.sourceforge.net/html/triaxial.html>.
47. Karney C.F.F. Algorithms for geodesics. *Journal of Geodesy*, 2013, Vol. 87, No 1, pp. 43–55.
 48. Kivioja L.A. Computation of geodetic direct and indirect problems by computers accumulating increments from geodetic line elements. *Bulletin Géodésique*, 1971, Vol. 99, No 1, pp. 55–63.
 49. Ligas M. Cartesian to geodetic coordinates conversion on a triaxial ellipsoid. *Journal of Geodesy*, 2012a, Vol. 86, No 4, pp. 249–256.
 50. Ligas M. Two modified algorithms to transform Cartesian to geodetic coordinates on a triaxial ellipsoid. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 2012b, Vol. 56, No 4, pp. 993–1006.
 51. Martz L.W., de Jong E. CATCH: A Fortran program for measuring catchment area from digital elevation models. *Computers and Geosciences*, 1988, Vol. 14, No 5, pp. 627–640.
 52. Moore I.D., Grayson R.B., Ladson A.R. Digital terrain modelling: A review of hydrological, geomorphological and biological applications. *Hydrological Processes*, 1991, Vol. 5, No 1, pp. 3–30.
 53. Panou G. The geodesic boundary value problem and its solution on a triaxial ellipsoid. *Journal of Geodetic Science*, 2013, Vol. 3, No. 3, pp. 240–249.
 54. Panou G., Delikaraoglou D., Korakitis R. Solving the geodesics on the ellipsoid as a boundary value problem. *Journal of Geodetic Science*, 2013, Vol. 3, No 1, pp. 40–47.
 55. Panou G., Korakitis R., Delikaraoglou D. Triaxial coordinate systems and their geometrical interpretation. *Measuring and Mapping the Earth: Dedicated volume in honor of Professor Emeritus C. Kaltsikis*. Thessaloniki, Ziti, 2016, pp. 126–135.
 56. Quinn P.F., Beven K.J., Chevallier P., Planchon O. The prediction of hillslope flowpaths for distributed modelling using digital terrain models. *Hydrological Processes*, 1991, Vol. 5, No 1, pp. 59–80.
 57. Shary P.A., Sharaya L.S., Mitusov A.V. Fundamental quantitative methods of land surface analysis. *Geoderma*, 2002, Vol. 107, No 1–2, pp. 1–32.
 58. Sjöberg L.E. Determination of areas on the plane, sphere and ellipsoid. *Survey Review*, 2006a, Vol. 38, No 301, pp. 583–593.
 59. Sjöberg L.E. New solutions to the direct and indirect geodetic problems on the ellipsoid. *Zeitschrift fuer Vermessungswesen*, 2006b, Vol. 131, pp. 35–39.
 60. Snyder J.P. Conformal mapping of the triaxial ellipsoid. *Survey Review*, 1985, Vol. 28, No 217, pp. 130–148.
 61. Sodano E.M. General non-iterative solution of the inverse and direct geodetic problems. *Bulletin Géodésique*, 1965, Vol. 75, No 1, pp. 69–89.
 62. Soter S., Harris A. The equilibrium figures of Phobos and other small bodies. *Icarus*, 1977, Vol. 30, No 1, pp. 192–199.
 63. Stooke P.J. Mapping worlds with irregular shapes. *Canadian Geographer*, 1998, Vol. 42, No 1, pp. 61–78.
 64. Stooke P.J., Keller C.P. Map projections for non-spherical worlds: The variable-radius map projections. *Cartographica*, 1990, Vol. 27, No 2, pp. 82–100.
 65. Tarboton D.G. A new method for the determination of flow directions and upslope areas in grid digital elevation models. *Water Resources Research*, 1997, Vol. 33, No 2, pp. 309–319.
 66. Thomas P.C. The shapes of small satellites. *Icarus*, 1989, Vol. 77, No 2, pp. 248–274.
 67. Vincenty T. Direct and inverse solutions of geodesics on the ellipsoid with application of nested equations. *Survey Review*, 1975, Vol. 23, No 176, pp. 88–93.
 68. Wilson J.P., Gallant J.C. (Eds.). *Terrain Analysis: Principles and Applications*. New York: Wiley, 2000, 479 p.
 69. Zevenbergen L.W., Thorne C.R. Quantitative analysis of land surface topography. *Earth Surface Processes and Landforms*, 1987, Vol. 12, No 1, pp. 47–56.